

東京工業大学 工学部 正会員 日野幹雄
東京工業大学 大学院 学生員 石川和彦

1. 概説 近年、都市における水需水量は年々増加を続け、更に将来においては相対的に増加するであろうことが予測されている。利用可能な水の絶対量に限界があるとするならば、限られた水を有効に使用することは必要である。その手段として、水の供給過程における Loss を減少させること、すなわち需水量変動を予測し、それに沿った供給を行なうこと、水資源開発の一つであると思われる。水計画の問題には、DPをはじめとする種々の手法が用いられており、ここでは適当に組み合わせた方法を行うことが必要であるが、ここでは、予測・制御理論を用いるみた。すなわち予測しようとする量と output とするシステムを考へ、このシステムの支配方程式（一般に線型常微分方程式）を仮定し、カルマン・フィルタを用いた予測・推定問題として水需水量予測の問題と扱ってみる。又、更に進めるとこの支配方程式中の諸定数の推定問題（システムパラメータの同定問題）も試みる。

2. 都市上水需水量予測に関するモデル化 以下のようなモデル化を行なう。すなわち、上水需水量 $Q(t)$ とその誘発原因と考えられる需水行動量 $B(t)$ との間、次の式が成り立つと考える。（毎秒）

$$\frac{dQ(t)}{dt} + a \cdot Q(t) = b \cdot B(t) \quad \text{----- (1)}$$

ここで、 a 及び b は定数である。このモデルに関して、状態量 Q 、 B 及び B の時間的変化する $\dot{B}$ のことを考え、この中で観測可能な量と Q のみであると、状態量ベクトル $X = (Q, B, \dot{B})$ 及び観測量ベクトル $Z = (Q)$ を考えると、このモデルに関する状態方程式及び観測方程式は次のようになる。

$$X(k+1) = \Phi(k+1, k)X(k) + \Gamma(k+1, k)W(k) \quad \text{----- (2)} \quad Z(k+1) = M(k+1)X(k+1) + V(k+1) \quad \text{----- (3)}$$

ここで、 k ; step 数 ($t = k\Delta t$)、 Φ 及び Γ ; 状態及び入力の変移行列、 M ; 観測行列、 W 及び V ; 白色ガウス雑音である。このモデルに関して上記の各行列は以下式 (4) ~ (6) のように書ける。状態変移行列中に関しては、式 (4) を直接差分化して求めるもよいが、ここでは変換～逆変換を用いた。（変換による係数は白体は不安定な限り、差分化による不安定問題は生じない。）

$$\Phi = \begin{pmatrix} e^{a\Delta t} & b(1 - e^{a\Delta t}) & 0 \\ 0 & 1 & \Delta t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{----- (4)} \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{----- (5)}$$

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \Delta t \end{pmatrix} \quad \text{----- (6)}$$

次に、カルマンフィルタによる $k+1$ step の最適推定値 $\hat{X}(k+1|k+1)$ を求める過程を簡単に記せば、以下の (7) 式である。

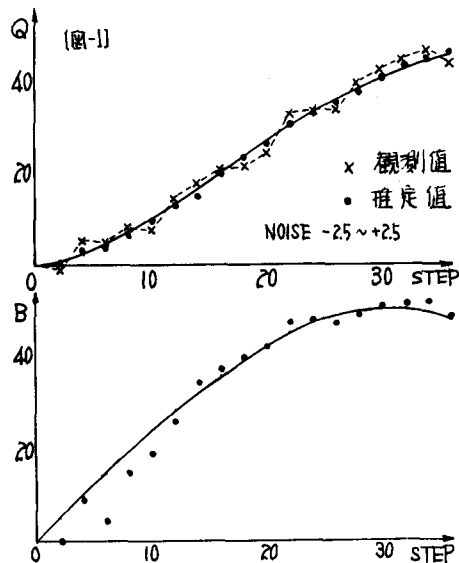
$$\hat{X}(k+1|k+1) = \Phi(k+1, k)\hat{X}(k) + K(k+1)[Z(k+1) - M(k+1)\Phi(k+1, k)\hat{X}(k)] \quad (7)$$

上式において、右辺第一項は $k+1$ step の最適予測値 $\hat{X}(k+1|k)$ を示し、第二項はそれに対する補正項、すなわち $k+1$ step の実際の観測値 $Z(k+1)$ と、予測観測値 $\hat{Z}(k+1|k)$ との差に補正係数 $K(k+1)$

(Kalman Gain Matrixと呼ぶ) を算出する。と算出する。と算出する。
 2. $\hat{x}$ は $k(k+1)$ を求める式は次の式(8)である。

$$K(k+1) = P(k+1|k) M^T(k+1) [M(k+1) P(k+1|k) M^T(k+1) + R(k+1)]^{-1} \quad (8)$$

$\hat{x}$ は K , P 及び R ; 推定誤差及び観測誤差の共分散行列である。以上述べたモデルに関する計算の一列を示すものが[図-1]である。



3. システムパラメータの同定問題 一般に、状態量 m 個 ($x_1, x_2, \dots, x_m$) が時間 t に関する j 階の微分方程式で記述されるものとする。時間 $t = k\Delta t$ に与える x_i の値を x_{ik} , 入力(強制力)を u_k , 乱数に関する雑音を w_{ik} とする。システムの特性は以下の差分方程式で記述される。

$$x_{1,k+1} + a_{11}x_{1,k} + \dots + a_{1j}x_{1,k-j} = b_{11}u_{k-1} + b_{12}u_{k-2} + \dots + b_{1j}u_{k-j} + w_{1,k-1} \quad (9)$$

$x_2 \sim x_m$ に関する式(9)と同様の式が得られる。ここで x_{ik} 項の i は j のマトリックス表示を示す。

$$X(k) = M(k-1) \cdot H(k-1) + W(k-1) \quad (10)$$

と書ける。ここで $X(k) = (x_{1k}, x_{2k}, \dots, x_{mk})^T$ (11) $M(k+1) = \begin{pmatrix} Y & 0 & \dots & 0 \\ 0 & Y & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & Y \end{pmatrix}$ (12) $(m \times n \text{ 行列})$ $n = (j \times m) \times m$

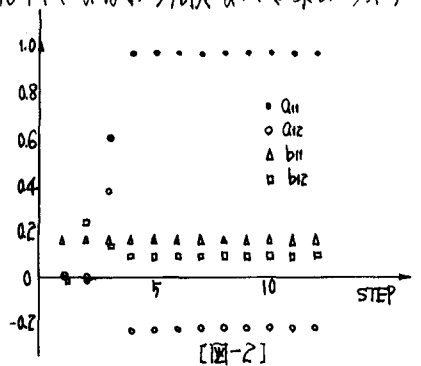
$$Y = (x_{1k-1}, x_{1k-2}, \dots, x_{1k-j}; x_{2k-1}, \dots, x_{2k-j}; \dots; x_{mk-1}, \dots, x_{mk-j}) \quad (13) (j \times m \text{ 次元ベクトル})$$

$$H = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1j} & \dots & i_{11} & i_{12} & \dots & i_{1j} & \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2j} & -a_{21} & -a_{22} & \dots & -a_{2j} & \dots & i_{21} & i_{22} & \dots & i_{2j} & \alpha_{31} & \alpha_{32} & \dots & \alpha_{3j} & \dots & -a_{m1} & -a_{m2} & \dots & -a_{mj} \end{bmatrix}^T \quad (14) (j \times m \times n \text{ 次元ベクトル})$$

今 $\hat{x}$ は $k(k+1)$ を求める式は次の式(8)である。と算出する。と算出する。と算出する。
 1. システムパラメータの同定問題 一般に、状態量 m 個 ($x_1, x_2, \dots, x_m$) が時間 t に関する j 階の微分方程式で記述されるものとする。時間 $t = k\Delta t$ に与える x_i の値を x_{ik} , 入力(強制力)を u_k , 乱数に関する雑音を w_{ik} とする。システムの特性は以下の差分方程式で記述される。

$$H(k+1) = \Phi(k+1|k) H(k) + V(k) \quad (15)$$

と書くことができる。ここで Φ は $k(k+1)$ を求める式は次の式(8)である。と算出する。と算出する。と算出する。
 2. システムパラメータの同定問題 一般に、状態量 m 個 ($x_1, x_2, \dots, x_m$) が時間 t に関する j 階の微分方程式で記述されるものとする。時間 $t = k\Delta t$ に与える x_i の値を x_{ik} , 入力(強制力)を u_k , 乱数に関する雑音を w_{ik} とする。システムの特性は以下の差分方程式で記述される。



1) 佐友 恒: 都市における水質汚染の動態特性について, 土木学会論文集第182号 1977.8