II-167 フロックと乱流について

信州大学工学部　正　佐々木八郎
〃　正　余越正一郎
〃　大学院　学　○松井　清

I.　フロック形成過程において，粒子のブラウン運動による衝突合一は短時間で完了し，さらにフロックの成長を促すためには粒子に相互衝突を与えるエネルギーを外部から加える必要がある。それが乱流の作用である。一般に，フロックの大きさは $10^{-4} \sim 10^{-1}$ cm の範囲にあると言われている。また最小乱子の寸法は大体 10^{-2} cm程度である。したがって，フロックの形成や破壊の問題を考える場合現象のスケールからして，中間乱子領域から最小乱子領域にかけての遷移領域及び最小乱子領域でのスペクトルの知識が必要になってくる。中間乱子領域での Lagrange スペクトル $E(\omega)$ が，寿命振動数 ω の -2 乗に比例することは Kolmogorov の相似理論から与えられているが，その他の領域ではまだよくわかっていない。ここで全ての領域をカバーする Lagrange スペクトルの漸近形を提案し，それを使用してフロック形成に寄与する乱流エネルギーを評価することを考える。

II.　"Lagrange スペクトルの漸近形" を提案するにあたり，次の二つの考えを基にする。(i) 最小乱子の寿命時間より大きな時間領域での流体粒子の運動はマルコフ過程とみなされる。(ii) Lagrange 速度 $v(t)$ は t について無限回微分可能で，かつ Taylor 展開可能とする。(i)より相関係数は指数函数となる。(ii)より相関も Taylor 展開できることになるが，そのためにはスペクトルの全ての積分モーメント $\int_0^\infty \omega^n E(\omega)\, d\omega$ が収束しなければならない。したがって，$E(\omega)$ の $\omega \to \infty$ における漸近形は ω のベキ函数ではなく，いわゆる急減少函数でなければならないことを示している。以上から Lagrange スペクトル $E(\omega)$ の簡単な漸近形として次を考えてみる。

(1)
$$E(\omega) = \frac{A_L \langle \varepsilon \rangle}{\omega_0^2} \frac{\exp[-c^2(\omega/\omega_\infty)^2]}{1 + (\omega/\omega_0)^2}$$

ここで $\langle \varepsilon \rangle$ は平均エネルギー逸散密度，ω_0, ω_∞ は最大乱子と最小乱子の寿命振動数，A_L, c はともに普遍定数である。(1)式が $\omega \ll \omega_\infty$ でマルコフ過程を表わし，特に中間乱子領域 $\omega_0 \ll \omega \ll \omega_\infty$ では Kolmogorov の相似理論から導かれる周知の -2 乗則と一致するのは明白である。次に $\omega \gg \omega_\infty$ での挙動をみるために構造函数 $D(\tau) = \langle [v(t+\tau) - v(t)]^2 \rangle$　(τ；寿命時間)

(2)
$$D(\tau) = 2\int_0^\infty (1 - \cos \omega\tau)\, E(\omega)\, d\omega$$

を求めてみると，レイノルズ数が非常に大きいとして $\omega_0 \ll \omega_\infty$ ($\omega_\infty/\omega_0 \sim Re^{1/2}$ であるから)，さらに寿命時間 τ が充分小さいとすると，(2)式は

(3)
$$D(\tau) = \frac{A_L}{c}\sqrt{\pi}\langle \varepsilon \rangle \omega_\infty \tau^2 + O(\tau^4)$$

となる。これは Kolmogorov の相似理論からの結果と一致する。したがって，(1)式で示したス

ペクトル函数は，全ての寿命振動数をカバーする Lagrange スペクトルの漸近形としての必要条件を備えていることがわかった。　定数 A_L, C を推定すると　$C \approx 4.4 A_L$　が得られる。　普遍定数 A_L の値は $A_L \approx 1$ である。　Lagrange スペクトルの表現に Euler 的な量であるエネルギー逸散密度を使用することには問題が残っている。[*)]

III.　直径 d の２つのフロックが間隔 L で存在しているとき，このフロック対の相対運動に影響する乱子エネルギー $\langle v^2 \rangle_{L,d}$ を考える。　フロックの存在で乱流場のスペクトルに変化が生じないと仮定する。　乱流場の全エネルギーは $\int_0^\infty E(\omega)d\omega$ であるが，考えているスペクトル函数には，寸法 L の乱子による低振動数領域での切断と寸法 d の乱子による高振動数領域での切断が生じる。　すなわち

$$(4) \qquad \langle v^2 \rangle_{L,d} = \int_0^\infty E(\omega)\left[\frac{\sin^2 \omega\tau_L/2}{(\omega\tau_L/2)^2} - \frac{\sin^2 \omega\tau_d/2}{(\omega\tau_d/2)^2}\right] d\omega$$

ここに τ_L, τ_d は寸法 L, d の乱子の寿命時間である。　フロック形成を考える場合，遷移領域及び最小乱子領域で取り扱われること，またフロック形成槽ではフロックの沈降を防ぐためにかなり大きなレイノルズ数であるとみなしてよいことから，(1) 式は　$E_1 \approx A_L \langle \varepsilon \rangle \exp\left[-C^2(\omega/\omega_\infty)^2\right]/\omega^2$　で代用することができ，ここで考える乱子エネルギーは次の形で表わすことが妥当であることがわかる。

$$(5) \qquad \langle v^2 \rangle_{L,d} = \int_{2\pi/\tau_L}^{2\pi/\tau_d} E_1(\omega)\, d\omega$$

次に積分限界を決める大きさ λ の乱子の寿命時間 $\tau_\lambda = \lambda/v_\lambda$ について考える。　相似理論より Lagrange 構造函数は最小乱子領域で

$$(6) \qquad D(\tau) \approx \sqrt{\langle \varepsilon \rangle^3/\nu}\ \tau_\lambda^2$$

である。　ここに ν は動粘性係数。　これから

$$(7) \qquad \tau_\lambda = \frac{\lambda^{1/2}}{\alpha^{1/2}} = \frac{\lambda^{1/2}}{(\langle \varepsilon \rangle^3/\nu)^{1/8}}$$

の関係が得られる。　ここに　$\alpha = (\langle \varepsilon \rangle^3/\nu)^{1/4}$　は最小乱子の加速度である。　一方中間乱子領域では　$D(\tau) \approx \langle \varepsilon \rangle \tau_\lambda$　であるから，上と同様に考えて

$$(8) \qquad \tau_\lambda = \frac{\lambda^{2/3}}{\langle \varepsilon \rangle^{1/3}}$$

の関係が得られる．

現象のスケールが最小乱子領域にある場合は (7) 式を，中間乱子領域にある場合は (8) 式を用いればよいであろう。

*) 余越 "乱れの Lagrange スペクトルの漸近形" 信大工紀要 32号，昭47.