

山梨大学工学部 正 員 萩原能男

山梨大学大学院 学生員 〇杉村淑人

はじめに 水撃圧の計算は Schnyder-Bergeron の特性直線法¹⁾により、複雑な現象の計算が可能とされた。また近年は電子計算機の利用により、摩擦損失などの損失も考慮に入れるに計算も可能になっている。²⁾しかしながら、水撃圧の負圧(蒸気圧)時における水の気化にともなう波速の遅れについては明確な処理がされておらず、たとえば I. S. Pearsall³⁾などによって気体混入時の波速のデータは示されているが、負圧時に水撃圧の計算をすすめるに至っていない。筆者もこの問題の解決を試みに⁴⁾成功することができていない。C. Thirriot⁵⁾は管路のヤング率が圧力の関数として変る場合について水撃作用の解析をし、変形がフックの法則に従う場合に比較して圧力の減衰は著しいとしているが、水についての取扱いをしていないためキャビテーション時の水撃作用の処理は残されている。

水撃圧の負圧時の取扱いとしては Escande⁶⁾が仙台で発表した升後方に大きな空洞が発生する、いわゆる水柱分離という境界条件によって解決されているものが多い。水柱分離(Column Separation)については、筆者の手元にある文献では鈴木(Shigeyo Suzuki)氏の論文が古く、最近では笠原英司、棚橋隆彦⁸⁾、Victor L. Streeter⁹⁾などの論文があり、これらの水柱分離理論に疑問を投げ、負圧時の波速変化も考慮しようとしたものに J. P. Th. Kalkwijk と C. Kranenburg¹⁰⁾の最近の論文がある。ここでは、これらの経過を考慮し、負圧を考慮した水撃圧に検討を加えることにした。

1. 基礎方程式

(1) 運動方程式、連続方程式、特性方程式 内径 D の円管の管軸にそって x 軸をとり、時間を t 、管平均流速を V 、圧力水頭を H 、摩擦損失係数を f 、重力の加速度を g として運動方程式(1)、連続方程式(2)を表わせば¹¹⁾

$$\frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} + g \frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{f}{2D} V|V| \quad (1) \quad a^2 \frac{\partial V}{\partial x} = -g \frac{\partial H}{\partial t} - gV \frac{\partial H}{\partial x} \quad (2)$$

となる。

また特性方程式は¹¹⁾ $\frac{dx}{dt} = V \pm a$ のとき $dH = \mp \left\{ \frac{a}{g} dV + a \frac{f}{D} \frac{V|V|}{2g} dt \right\} \quad (3)$ (複号同順) となる。

(2) 初期条件、境界条件 図-1に示すように、一様断面円管路の末端に、弁をとりつけ流量調節をしている場合の初期定常状態には、Minor Losses を無視すると、

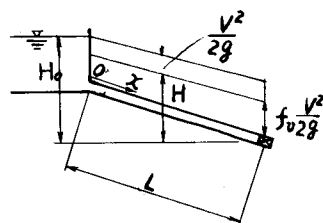
$$H = H_0 - \frac{V^2}{2g} - f \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g} \quad (4)$$

$x = 0$ 、貯水池の境界条件は

$$H(t, 0) = H_0 - \frac{V(t, 0)^2}{2g} \quad (5)$$

$x = L$ 、弁での境界条件は、

$$V(x, L) = \varphi(t) \sqrt{2gH(x, L)} \quad (6)$$



(図-1)

(3) 方程式の無次元化表示 大気圧を H_0 として、これを基準にして無次元化する。また、波速の基準値を a_0 、流速および時間の基準をそれぞれ次のようにする。 $V_a = \sqrt{2gH_a}$ 、 $\mu = L/a_0$ 。以上の諸量をもとにして、次のような無次元量を作る。

距離 $\xi = x/L$, 時間 $\theta = t/\mu$, 圧力 $h = H/H_a$, 流速 $v = V/V_a$, 波速 $c = a/a_a$

定数 $P = a_a V_a / (2g H_a) = a_a / V_a$, $h_0 = H_0/H_a$, $v_0 = V_0/V_a$

摩擦損失係数 $\xi = f \cdot L/D$, 蒸気圧 $h_v = H_v/H_a$, 弁の開度 $\varphi(\theta)$

これらの無次元量を用いて、基礎方程式を書きかえると、次のようになる。

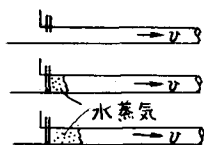
特性方程式 $d\xi/d\theta = 1/P \cdot v \pm C \dots (7)$, $dh = \mp \{2PCdv + \xi C|v|v d\theta\} \dots (8)$ (複号同順)

境界条件 貯水池 $h(\theta, 0) = h_0 \dots (9)$, 弁 $v(\theta, 1) = \varphi(\theta) \sqrt{h(\theta, 1)} \dots (10)$

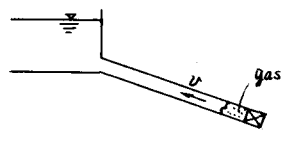
2. 水柱分離による負圧の処理

水撃作用のように圧力変動の大きい現象では、容易に圧力が低下し、蒸気圧まで圧力が低下すると水蒸気が発生することになる。この水蒸気が小さな泡状で水中に分布している場合には、水撃圧の波速が小さくなることが想像され、これに着目して筆者はその取扱いを検討してきた。⁽⁹⁾しかし、現在この方法について J.P.Th. Kalkwijk, C. Kranenburg⁽¹⁰⁾の研究などしかみられず、ほとんどが水柱分離と云う境界条件で説明されている。⁽¹²⁾

図-2は代表的な水柱分離である。低下した圧力の大きさによって水蒸気の発生速度が決まるものと考えられるが、この条件を使って論文は見当らず、特性曲線法の条件より水蒸気の発生速度を



(図-2)



(図-3)

定めているのが一般である。また図-3に示すような管路においては、弁の位置で水柱分離が発生する例が多い。管路の途中において水柱分離の生じたと例を論じたものは少い。⁽⁹⁾

(1) 弁の位置における水柱分離 弁の境界条件を用いて、

h_j, v_j の値を計算すると次式のようになる。

$$d\xi = 1 - \xi_i, \quad d\theta = P \cdot d\xi / (v_i + PC_i) \quad (11)$$

$$Y_i = h_i + 2PC_i v_i - \xi C_i |v_i| v_i d\theta \quad (12)$$

$$\theta_j = \theta_i + d\theta \quad \xi_j = \xi_i + d\xi = 1$$

$$\varphi(\theta_j) \neq 0 \text{ のとき } Y_i \geq 0 \quad v_j = \varphi(\theta_j) \left\{ -PC_i + \sqrt{P^2 C_i^2 + Y_i / \varphi(\theta_j)^2} \right\}, \quad h_j = v_j^2 / \varphi(\theta_j)^2 \quad (13)$$

$$Y_i < 0 \quad v_j = \varphi(\theta_j) \left\{ PC_i - \sqrt{P^2 C_i^2 - Y_i / \varphi(\theta_j)^2} \right\}, \quad h_j = -v_j^2 / \varphi(\theta_j)^2 \quad (14)$$

$$\varphi(\theta_j) = 0 \text{ のとき } v_j = 0, \quad h_j = Y_i \quad (15) \quad \text{このとき } h_j \text{ が蒸気圧 } h_v \text{ より小さい値が得られる場合には、図-4のような水柱分離現象になる。}$$

$$\text{このとき } h_j - h_i = -2PC_i(v_j - v_i) - \xi C_i |v_i| v_i d\theta \quad (16)$$

$$h_j = h_v, \quad (12) \text{ 式を用いて } v_j = (Y_i - h_v) / (2PC_i) \quad (17) \text{ となり、弁を通過する水の管内への換算速度は}$$

$$v_j' = -\varphi(\theta_j) \sqrt{h_v} \quad \text{となる。気体発生速度 } u \text{ は } u = v_j' - v_j \quad (18), \text{ 気体発生量は } \xi_g = 1/P \cdot \int u d\theta \quad (19)$$

で表われ、この値が0になるまで水柱分離が継続することになる。

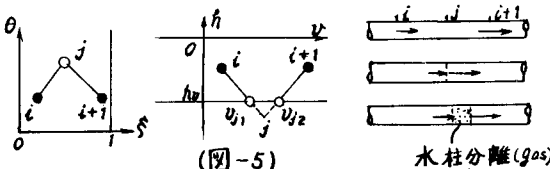
(2) 管路中間における水柱分離 図-5に示

すような場合には、管路の中間においても水柱分離が発生し、次式により計算される。

$$d\xi = \xi_{i+1} - \xi_i \quad d\theta = \theta_{i+1} - \theta_i$$

$$d\theta_i = \{P d\xi + (PC_{i+1} - v_{i+1}) d\theta\} / \{P(C_i + C_{i+1}) - (v_{i+1} - v_i)\} \quad (20), \quad d\xi_i = (v_i + PC_i) d\theta_i / P \quad (21), \quad d\theta_{i+1} = d\theta_i - d\theta$$

$$Z_i = h_i + 2PC_i v_i - \xi C_i |v_i| v_i d\theta_i, \quad Z_{i+1} = h_{i+1} - 2PC_{i+1} v_{i+1} + \xi C_{i+1} |v_{i+1}| v_{i+1} d\theta_{i+1} \quad (22)$$



$\xi_j = \xi_i + d\xi_i$, $\theta_j = \theta_i + d\theta_i$, $h_j = (C_i Z_{i+1} + C_{i+1} Z_i) / (C_i + C_{i+1})$, $U_j = (Z_i - Z_{i+1}) / \{2\rho(C_i + C_{i+1})\} \dots (23)$
 h_j を計算して h_0 より小さいときのみ $h_j = h_0$ とし、 $U_{j1} = (Z_i - h_0) / (2\rho C_i)$, $U_{j2} = (h_0 - Z_{i+1}) / (2\rho C_{i+1}) \dots (24)$
 となる。前節同様に気体柱の発生速度は $u = U_{j2} - U_{j1}$ となり、 $\xi_2 = 1/\rho \cdot \int u d\theta = 0$ になるまで、
 $h_j = h_0$ なる関係が持続され、 U_j は(24)式によって計算される。

(3) 貯水池側における水柱分離

図-6のように、貯水池側の管路入口に弁などのある場合には、この部分にも水柱分離が生ずる。

$$d\xi = -\xi_i \quad d\theta = \rho \cdot d\xi / (U_i - \rho C_i) \quad (25)$$

$$X_i = h_0 - h_i + 2\rho C_i U_i - \xi C_i U_i / U_i d\theta$$

$f_c \neq 0$ のとき ($C_1 \neq 0$)

$$X_i \geq 0 \quad f_c = C_i (f_i + 1) \quad (26)$$

$$X_i < 0 \quad f_c = C_i (f_i - 1) \quad (28)$$

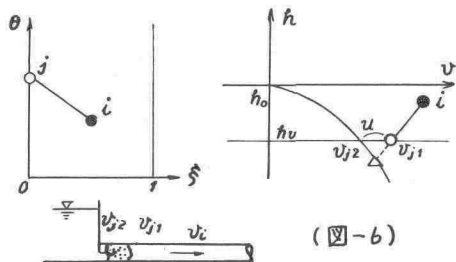
$f_c = 0$ のとき ($C_1 = 0$)

$$h_j = h_0 - f_c |U_j| U_j \quad (31)$$

$$U_j = 1/f_c \cdot [-\rho C_i + \sqrt{\rho^2 C_i^2 + f_c X_i}] \quad (27)$$

$$U_j = 1/f_c \cdot [\rho C_i - \sqrt{\rho^2 C_i^2 - f_c X_i}] \quad (29)$$

$$U_j = X_i / (2\rho C_i) \quad (30)$$

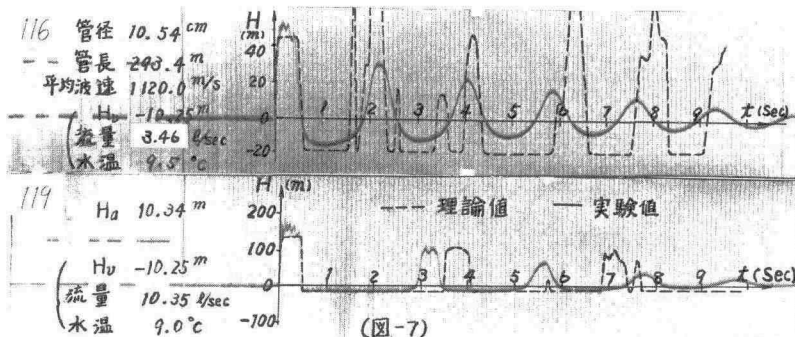


(図-6)

この場合も同様に $h_j < h_0$ となったとき水柱分離が生じて、 $h_j = h_0$, $U_{j1} = (h_0 - h_0 + X_i) / (2\rho C_i) \dots (32)$
 $U_{j2} = \sqrt{(h_0 - h_0) / f_c} \dots (33)$ となり、 $u = U_{j1} - U_{j2}$, $\xi_2 = 1/\rho \cdot \int u d\theta = 0$ となるまで、この現象は継続する。

(4) 計算結果

本学の実験装置において実験した資料の一例に、上記の水柱分離理論により計算した結果を合せて書いたものが図-7である。



(図-7)

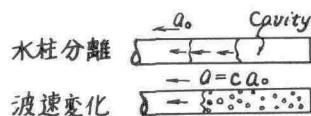
3. 負圧時の波速の変化を考慮した解析

蒸気圧まで圧力が降下して、水蒸気が発生した場合に大きな空洞が生じるものとする水柱分離の考え方と、小さな気泡が管内に一樣に分布すると考える方法とでは、理論展開も異なることは前述した。後者については種々検討されているが、完成されておらないので、筆者は特性方程式を用いた負圧時の波速の変化を考慮した理論展開を試みることにした。

(1) 波速変化を要求される例

a. 瞬間閉塞による弁の位置による負圧と波速のおくれ

図-9の弁の位置(A)における負圧発生時の圧力波形は、図-10のようになる。Joukowskyの公式により、初期圧力上昇量は $H = aV_0/g$ となるので、 $h = a_0 V_0 / g H_0 = 2\rho V_0$ となり、同様に負圧への h_0 より
 の降下量は $2\rho C V_0$ となる。一方正圧の経続時間 $\theta_1 = (2L/a_0) / (4/a_0)$
 $= 2$, 負圧の経続時間 $\theta_2 = (2L/Ca_0) / (4/a_0) = 2/C$ となるため、正圧波形のなす面積①は、

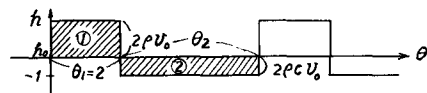


(図-8)

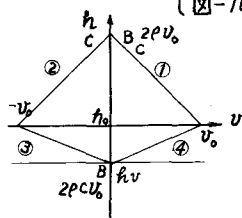


(図-9)

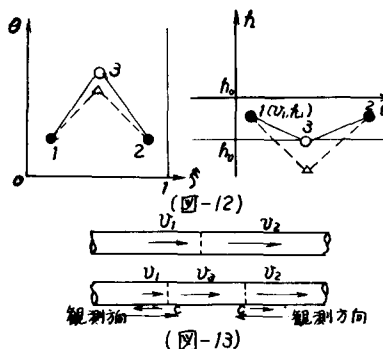
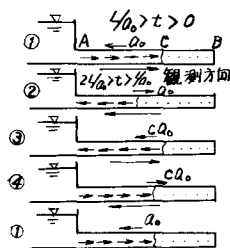
$2Pv_0 \times 2 = 4Pv_0$ 、負圧波形のなす面積②は、 $2PCv_0 \times 2/c = 4Pv_0$ となり、両者は等しくなる。また、 $2PCv_0 = 1 + h_0$ より $C = (1 + h_0)/(2Pv_0)$ となる。このことは次に示すように特性曲線法にもとづく Schnyder-Bergern の特性直線法においても同様に説明される。すなわち図-11の $v \sim h$ 面の①、②直線のこう配は $\pm 2P$ 、③、④直線のこう配は $\pm 2PC$ であり、図より $2PC = (1 + h_0)/v_0$ となり、 $C = (1 + h_0)/(2Pv_0)$ となるので前述の(34)式と全く一致する。



(図-10)

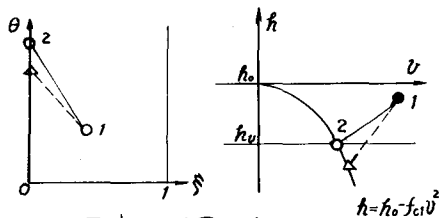


(図-11)

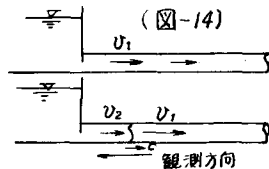


(図-13)

図-12に示すような場合には、既知点 1, 2 より、特性方程式により点 3 の圧力を計算すると、蒸気圧 h_v より小さい h の値が計算されることになる。この場合には波速 a_0 を $c a_0$ と修正して、 $h = h_v$ の直線上の点 3 で特性直線が交わらなければならないので、 $2PC = (h_1 - h_v)/(v_3 - v_1) = (h_2 - h_v)/(v_2 - v_3)$ より $v_3 = \{(h_2 - h_v)v_1 + (h_1 - h_v)v_2\} / (h_1 + h_2 - 2h_v)$ (35) となる。この様子を図示すると、図-13 になる。



(図-14)



(図-15)

C. 貯水池入口において生ずる波速のおける場合

貯水池側の管路入口に、損失水頭をもたらしうな構造物が存在する場合には、波速のおくれが図-14 のようにもたらされる。すなわち

$$v_2 = \sqrt{\frac{h_0 - h_v}{f c_1}} \quad (36) \quad C = \frac{h_1 - h_v}{2P(v_1 - v_2)} \quad (37)$$

この様子を図示すると、図-15 のようになる。

以上の考え方をもとにして、波速の変化を考慮しに水撃圧の計算をすすめることができる。

4. 文献

- 1) 本間, 石原; 応用水理学中 I (丸善) 1957 pp.174-238
- 2) V.L.Streeter; Waterhammer Analysis of Pipelines. Proc.ASCE Vol.90, HY4, 1964
- 3) M.Marchal, G.Flesch and P.Suter; The Calculation of the Digital Computer. Proc.Intern.Symp. ASME. Nov. 1965
- 4) V.L.Streeter; Computer Solution of Surge Problems. Proc.Instn Mech Engrs. Vol. 180, 3E, 1966
- 5) J.A.Fox; The use of the digital computer in the solution of waterhammer problems. Proc.Instn.Civ.Engrs. 1968, Vol.39
- 6) I.S.Pearsall; The Velocity of Water Hammer Waves. Proc.Instn.Mech.Engrs. Vol.180, No.3E, 1965
- 7) 荻原, 砂田; 水撃圧の負圧について, 山梨大学工学部研究報告 第22号 1971
- 8) C.Thirriot; Compt Rend Hebd Seances Acad Sci Ser A-B, Vol.271, No.14, 1970
- 9) L.Escande; Proc.IAHR.Symp.Sendai, 1962
- 10) S.Suzuki; Experimental Investigation of Water Hammer in Steel Pipes. J.Faculty Engrn.Tokyo Imperial Univ. Vol.21, No.2, 1937
- 11) 荻原, 棚橋; 水柱分離を伴う水撃作用の解析, 日本機械学会論文集 (A2編) 34号 263号 昭和43
- 12) V.L.Streeter; Water Hammer Analysis. Proc.ASCE.Vol.95, HY6 1969
- 13) J.P.Th.Kalkwijk and C.Kranenburg; Proc.ASCE.Vol.97, HY10, 1971
- 14) V.L.Streeter; Proc. ASCE.Vol.88, HY3, 1962
- 15) L.Escande; 6) 前出, S.Suzuki; 7) 前出, R.T.Richards; Tran.ASME.Vol.68 No.6 1956
- 16) M.R.Carstens and T.W.Hagler; Proc.ASCE.Vol.90, HY6, 1964
- 17) R.J.Brown; Trans.ASME.Vol.90, D, 1968