

大阪大学工学部 正 員 室田 明

大阪大学大学院 学生員 江藤剛治

大阪大学大学院 学生員 吉岡正道

1. はじめに

Throughputとしての貯留システムの解析的研究において、システム为非線形性が大きな困難をもたらすことが多い。ところが解析の目的によっては、必ずしも定量的に厳密な解は必要とされず、システムの定性的な特性(たとえば貯水池容量と貯留効果の関係)がわかれば十分なことも多い。このような場合においては、非線形貯留システムに対して、定性的な特性が保持されるという意味においての等価な線形システムが定義できれば非常に好都合である。

本研究においては、まず上記の意味においての等価線形システムを求める一般的な手法を提案する。つぎに実用上最もよく現われる二種類の非線形貯留システムに対して筆者らの提案した等価線形貯水池システムを求めた。また非線形貯水池を用いたシミュレーションと、等価線形貯水池の理論より得られる結果とを比較することにより、一般の貯水池システムの非線形効果についても検討を加えた。

2. 等価線形貯水池の解法

貯水池システムにおいては、実用上流出量 g は貯留量 S のみの関数と考えてよいことが多い。この $S \sim g$ 関係を適当な近似式で近似することを考える。まず S が g の関数 $S(g)$ で表わされるとし、その近似解を $u(g)$ とすれば、 $u(g)$ の各パラメータはつぎのような定義により求めることができる。

(詳しくは1)参照)

$$\min \sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \{S(g) - u(g)\}^2 f(g) dg \quad (1)$$

ここに $f(g)$: 重み関数としての 入力の確率密度関数
たとえば $u(g)$ が多項式で表わされるとするときは、

$$u(g) = a_0 + a_1 g + a_2 g^2 + \dots + a_n g^n = \sum_{j=0}^n a_j g^j \quad (2)$$

誤差を小さくするために、原点を g に関する平均値に移して計算を行なうことにすると、

$$a_j = \left| \begin{array}{cccc} 1 & \mu_1 & \dots & C'_1 & \dots & \mu_n \\ \mu_1 & \mu_2 & \dots & C'_2 & \dots & \mu_{n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \mu_n & \mu_{n+1} & \dots & C'_{n+1} & \dots & \mu_{2n} \end{array} \right| \bigg/ \left| \begin{array}{cccc} 1 & \mu_1 & \mu_2 & \dots & \mu_n \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 & \dots & \mu_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mu_n & \mu_{n+1} & \mu_{n+2} & \dots & \mu_{2n} \end{array} \right| \quad (3)$$

(j+1)列

$$\text{ここに } \mu = \int_{-\infty}^{\infty} g f dg$$

$$\mu_j = \int_{-\infty}^{\infty} (g - \mu)^j f d(g - \mu) \quad , \quad C'_{j+1} = \int_{-\infty}^{\infty} S(g - \mu)^j f d(g - \mu)$$

したがって、 $S = a_1 q$ として等価線形貯水池が定義される。

3. 適用例

代表的な貯留システムとして Fig-1 のごとき 2 つのタイプを考える。Fig-1(a) はいわゆる貯留関数と呼ばれるタイプであり、Fig-1(b) は貯水池操作方式としてしばしば仮定される階段関数型、すなわち貯水池が空か満水のときは流入量に等しい流量を放流し、それ以外は目標放流量 q_0 が放流されるというタイプである。

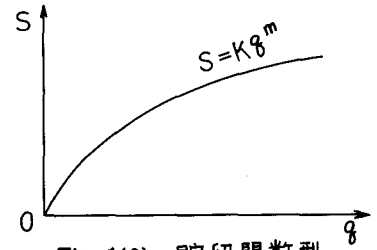


Fig-1(a) 貯留関数型

i). 貯留関数型の場合

よく知られたようにこの場合 $S \sim q$ 関係は $S = Kq^m$ と表わされる。また入力の変率分布として水文量の変率分布にしばしば適用されるガンマ分布を仮定する。このとき

$$f(q) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} q^{\alpha-1} e^{-\beta q} \quad (4)$$

いま、 q に関する原点まわりについて、(3) 式の M_j および C_{j+1} を求める。

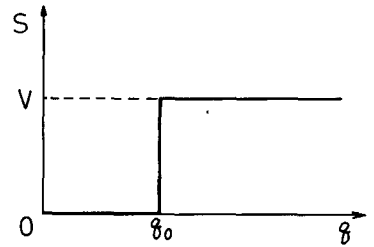


Fig-1(b) 階段関数型

$$\left. \begin{aligned} V_j &= \int_0^\infty q^j f(q) dq = \int_0^\infty q^j \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} q^{\alpha-1} e^{-\beta q} dq = \frac{\Gamma(j+\alpha)}{\beta^j \Gamma(\alpha)} \\ C_{j+1} &= \int_0^\infty S q^j f(q) dq = \int_0^\infty K q^m q^j \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} q^{\alpha-1} e^{-\beta q} dq = \frac{K \Gamma(m+j+\alpha)}{\beta^{m+j} \Gamma(\alpha)} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

M_j および C_{j+1} はそれぞれ V_j , C_{j+1} より求められる。

ii). 階段関数型の場合

この場合は $S \sim q$ 関係を (2) 式のごとく高次の多項式に展開しても、階段関数の直角部による高周波成分を説明することにはならないから、始めから一次式を仮定することにする。また数学的な取り扱いを容易にするために入力の変率分布として正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ を考える。このとき

$$f(q) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(q-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (6)$$

$q_* = (q - \mu)/\sigma$ なる座標変換を行ない、新座標での諸量に $*$ を付して表示すれば

$$\left. \begin{aligned} \mu_1 &= 0, \quad \mu_2 = 1 \\ C'_1 &= \int_{-\infty}^\infty S_* f_* dq_* = V \int_{q_{0*}}^\infty f_* dq_* = Vp \\ C'_2 &= \int_{-\infty}^\infty S_* q_* f_* dq_* = V \int_{q_{0*}}^\infty q_* f_* dq_* = V\phi_* \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

ここに

$$q_{0*} = (q_0 - \mu)/\sigma, \quad p = \int_{q_{0*}}^\infty f_* dq_*, \quad \phi_* = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{q_{0*}^2}{2}}$$

したがって

$$a_1 = V\phi_* \quad (8)$$

4. シミュレーションによる非線形効果の検討

前節ii)の階段関数を貯留方程式とする場合について、シミュレーション結果と等価線形貯水池より得られる結果を比較し、線形近似で表わしえない非線形効果についての若干の考察を行なった。

シミュレーションのケースはつぎのとおりである。

$$\rho = 0.0, 0.8$$

$$V = 1, 3, 30$$

$$g_0 = 3, 2, 1$$

ここに ρ は入力の自己相関関数、 V は貯水池容量、また入力は $N(3, 1)$ なる正規分布とした。

平均値まわりの各次のモーメントについての比較の例をTable-1に、自己相関関数の例をFig-2に、また出力 g の代表的パターンと確率分布の比較の例をFig-3に示す。Table-1において過水($g < g_0$)の生起確率が1%以下の場合、実際の値とは言えないので省いてある。これらの図表よりつぎのようなことがわかる。

i). 平均値はもとより、標準偏差についても、線形解とシミュレーション結果はほぼ一致しているが、歪度、とがり度についてはかなり大きな差を示す場合がある。

ii). この差は V が大きいほど、また $(\mu - g_0)$ が小さいほど大きくなる。

iii). 自己相関関数についても V が大きく、 $(\mu - g_0)$ が小さくなると線形解はシミュレーション結果に比して過大な持続性を示す。

iv). これらの性質は ρ が小さいほど顕著である。

このような性質はFig-3を参照すれば明らかである。すなわち、非線形効果が大きいときは g_0 に等しい放流量 g が放流されることが非常に多く、線形解に対してシミュレーション結果は強いとがりを示す。このとがりが自己相関関数の値を減少せしめる。以上の考察より、貯水池操作の非線形特性は、 $V, \sigma, \mu - g_0, \rho$ の4つの量により支配されていると考えられる。前者3つの量は線形貯留定数 a により代表されるであろう。すなわち、

$$a = V \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(g_0 - \mu)^2}{2\sigma^2}}$$

また ρ はつぎの式により、相関関数の減衰定数と関係づけられる。

Table -1 Linear Approximation $\mu = 3.0$

	V	q_0	st.dev.		skew.	curt.
			σ	σ'	$g=0.0$	$cur=3.0$
$\beta=0.0$	1	3	0.75	0.75	-0.02	4.83
		2	0.90	0.82	0.55	2.87
		1	1.00	0.95	0.15	2.81
	3	3	0.54	0.54	-0.07	8.40
		2	0.88	0.64	0.70	2.83
		1				
	30	3	0.20	0.20	-6.86	72.50
		2				
		1				
$\beta=0.8$	1	3	1.01	0.96	-0.06	3.50
		2	1.03	0.97	0.09	3.15
		1	1.05	0.99	0.01	3.07
	3	3	0.94	0.90	-0.10	3.95
		2	1.00	0.93	0.24	3.07
		1	1.04	0.98	0.07	2.92
	30	3	0.58	0.54	-0.70	11.30
		2				
		1				

σ', g', cur' は線形解

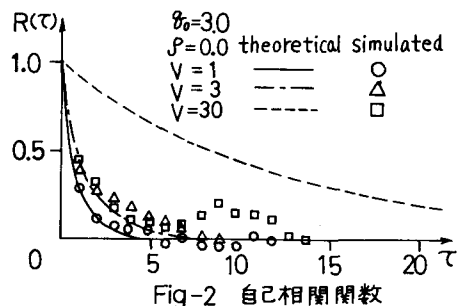


Fig-2 自己相関関数

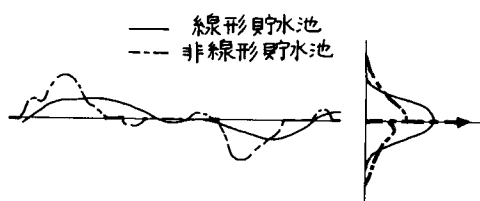


Fig-3 流出パターンと確率分布

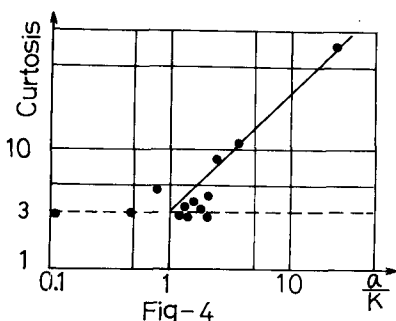


Fig-4

$$K = \left(-\frac{1}{\ln p} + \frac{1}{2} \right) \Delta t$$

よって Q/K により非線形効果を表わすことができるであろう。たとえばとがり度と Q/K との関係を示す図が Fig-4 である。両者はかなり良い相関関係を示している。

5. おわりに

本報告に示した手法は筆者らにより水資源計画の信頼度に関する研究²⁾に適用され、実用上十分な適用性があることが確かめられた。

参考文献

- 1) 室田・江藤・吉岡, “水資源計画のための水文資料の精度について,” 関西支部年次学術講演会 S. 47. 6
- 2) 室田・江藤・吉岡, “水資源計画の信頼性について,” 第27回年次学術講演会 S. 47. 10