

大阪大学工学部 正 員 室田 明

同 学生員 江藤 剛治

同 同 吉岡 正道

1. はじめに

水資源計画において、すべての関係する要素を考慮して計画を立てることは不可能であるし、計画の基礎となる水文資料さえも100%信頼することはできない。よって計画の策定の各段階でできるだけ誤差の介入を防ぐ努力もさることながら、現状では誤差の存在を積極的に肯定し、それによる計画の適用性の限度や、信頼性の減少の度合などをあきらかにしておく方がむしろ肝要であると考えられる。しかしながら既往の研究においてこのようなテーマは、各論文の中で他の主要なテーマにからんで断片的に取り上げられているにすぎず、しかもそれらの大部分はシミュレーションによるケース・スタディである。本論文では水資源貯留調節システムからの放流量を評価するための評価関数として、2~3の損失関数(Loss function)を考え、平均的な損失量が、水文資料のSample Size、観測誤差などによりどのような影響を受けるかを表す式を理論的に導いた。また理論解とシミュレーションとの比較から若干の補正を行なうことにより、より精度の高い式を導いた。この解により、貯留調節システムの評価の基準としての損失量の信頼度と、そのシステムの貯水量、目標放流量、入力としての自然流量の統計的諸特性との関係を実用上十分な精度で定式化することができた。

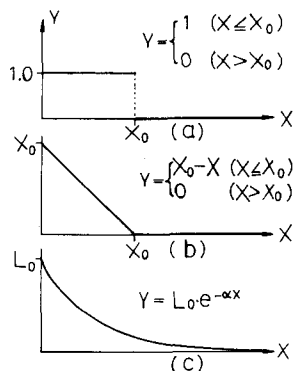


Fig.1

関数として、2~3の損失関数(Loss function)を考え、平均的な損失量が、水文資料のSample Size、観測誤差などによりどのような影響を受けるかを表す式を理論的に導いた。また理論解とシミュレーションとの比較から若干の補正を行なうことにより、より精度の高い式を導いた。この解により、貯留調節システムの評価の基準としての損失量の信頼度と、そのシステムの貯水量、目標放流量、入力としての自然流量の統計的諸特性との関係を実用上十分な精度で定式化することができた。

2. 評価関数と計画の信頼性の測定

2-1 概説 ある水資源貯留調節システムからの放流量を評価する基準として、つぎのようなものが用いられる。
i) 目標放流量を放流できない期間の総数, ii) 目標放流量が放流できない期間について、目標放流量と実際の放流量の差(すなわち不足水量)の総和, iii) 放流量の大きさに従って損失量が連続的に減少する。(本論文では指数関数的に減少すると仮定した。)

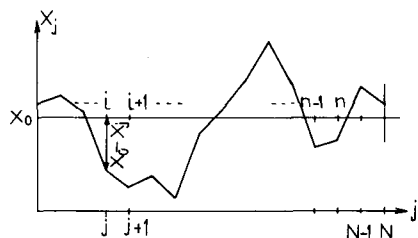


Fig.2

これら3つの場合について、評価というプロセスを一種のシステムとしてとらえれば、放流量にそれぞれFig. 1(a), (b), (c)で示される3種類のFilterをかけることにはかならない。本論文では解析上の問題から、i), ii)の場合については確率論的に、iii)の場合はシステム論的アプローチにより理論的解析を行なった。これらの解析により、入力としての放流量がそれぞれの評価関数によって、どのような変換を受けるかを調べる。これがわかればつぎのよ

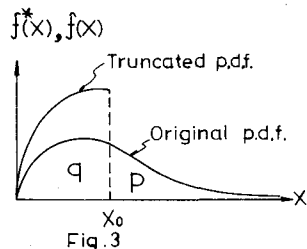


Fig.3

うにして計画の信頼度を測ることができる。たとえば計画の評価基準としての損失量の総和の期待値を E , ある原因による E の誤差を ΔE とすれば, 計画の信頼度の測度は $|\Delta E/E|$ で定義できるであろう。Sample Size の不足の場合を例にとれば, ΔE は variance-length curve の式より求めることができる。

2-2 不足期間, 不足水量を評価関数とする場合 独立・定常時系列を考える。放流量を X_j ($j = 1, 2, \dots, N$) とし, N 期間において $X_j \leq X_0$ なる期間の総数 n と, $S_n = \sum_{j=1}^n (X_0 - X_j)$ (for $X_j \leq X_0$, Fig. 2 参照) なる総不足水量 S_n の p. d. f. を求める。ここに X_0 は目標放流量である。

X_j の確率分布関数が $F(X)$ であらわされるとき $X_j \leq X_0$ に対応する Truncated distribution $F^*(X)$ を考える (Fig. 3 参照)。また $X_j \leq X_0$ なる確率を g とすれば

$$F^*(X) = \begin{cases} F(X)/g & (X \leq X_0) \\ 0 & (X > X_0) \end{cases} \quad (1)$$

$$g = \int_{-\infty}^{X_0} dF(X) = F(X_0), \quad p = 1 - g \quad (2)$$

この時 n の p. d. f. はよく知られたように 2 項分布となる。

$$Pr(n=k) = {}_N C_k g^k p^{N-k} \quad (k=0, 1, \dots, N) \quad (3)$$

$F^*(X)$ に対応するあらたな確率変数を X_j^* とし, そのキュムラント母関数を $K^*(V)$, n と S_n の結合キュムラント母関数を $K(u, V)$ とすれば, (詳しくは 1) 参照)

$$K^*(V) = \sum_{r=1}^{\infty} K_r^* \frac{V^r}{r!} \quad (4), \quad K(u, V) = N \log \{ g e^{u+VX_0+K^*(-V)} + p \} \quad (5)$$

ここに K_r^* は r 次のキュムラントである。特に,

$$K_1^* = E(X_j^*) = \mu^*, \quad K_2^* = \text{Var } X_j^* = E(X_j^* - \mu)^2, \dots \quad (6)$$

(5) 式をパラメーター u, V で偏微分し, u, V を 0 とおくことにより, n, S_n の平均値まわりの各次のモーメントが求められる。たとえば,

$$\left. \begin{aligned} E(n) &= Ng, \quad \text{Var}(n) = Ngp, \dots \\ E(S_n) &= Ng(X_0 - \mu^*), \quad \text{Var}(S_n) = Ng\{p(X_0 - \mu^*)^2 + K_2^*\}, \dots \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

よって Sample Size の不足による $E(n)$, $E(S_n)$ の相対誤差, すなわち計画の信頼性は次式で評価できる。

$$\sqrt{V(n)}/E(n) \quad \text{あるいは} \quad \sqrt{V(S_n)}/E(S_n) \quad (8)$$

そのほか, たとえば入力情報としての流量の平均値 μ や標準偏差 σ に, $\Delta\mu$, $\Delta\sigma$ などの誤差が含まれる場合の信頼度は次式で定義されるだろう。

$$|\Delta\mu \frac{\partial E}{\partial \mu} / E|, \quad |\Delta\sigma \frac{\partial E}{\partial \sigma} / E| \quad (8')$$

2-3 損失が指数関数的に減少する場合 損失を y とおき、放流量を x とおくとき Fig. 1(c)を参照して,

$$y = L_0 e^{-\alpha x} \quad (9)$$

x の p.d.f. を $f(x)$, x_1 と x_2 の結合確率密度関数を $f_2(x_1, x_2)$, かつ y_1, y_2 は x_1, x_2 に対応するものとし, それぞれ添字 '1', '2' の付された量は互に離れているものとする,

$$f_y(y) = f(x) \left| \frac{\partial x}{\partial y} \right|, \quad (10)$$

$$\mu_y = \int_{-\infty}^{\infty} y(x) f(x) dx, \quad \sigma_y^2 = \int_{-\infty}^{\infty} y^2(x) f(x) dx - \mu_y^2 \quad (11)$$

$$R_y(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (y_1 - \mu_y)(y_2 - \mu_y) f_2(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \quad (12)$$

ここに $f_y(y), \mu_y, \sigma_y, R_y(\tau)$ は y の p.d.f., 平均, 標準偏差, 自己相関関数。

議論を進めるために $f(x), f_2(x_1, x_2)$ に $N(\mu_x, \sigma_x^2)$ なる正規分布を設定しよう。かつ x の自己相関関数を $f_2(\tau)$ とする。若干の計算ののち次式が得られる。

$$\mu_y = L_0 e^{\frac{\alpha(\alpha\sigma_x^2 - 2\mu_x)}{2}}, \quad \sigma_y^2 = L_0^2 e^{2\alpha(\alpha\sigma_x^2 - \mu_x)} - \mu_y^2 \quad (13)$$

$$R_y(\tau) = L_0^2 e^{\alpha[\alpha\sigma_x^2\{1+f_2(\tau)\} - 2\mu_x]} - \mu_y^2 \quad (14)$$

$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y\alpha} \cdot \frac{1}{y} \cdot e^{-\frac{(\frac{1}{2}\ln\frac{y}{L_0} + \mu_x)^2}{2\sigma_x^2}} \quad (15)$$

また y の Variance-length curve は次式で定義される。

$$V_y(T_*) = \frac{2}{T_*} \cdot \int_0^{T_*} (T_* - \tau) \cdot R_y(\tau) d\tau \quad (16)$$

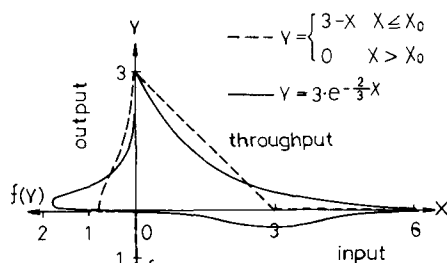


Fig. 4

$R_y(\tau)$ が (14) 式のままだと一般に (16) 式の積分はできないので, e^k に関する級数展開をしておくといふ。

$$R_y(\tau) = L_0^2 e^{\alpha[\alpha\sigma_x^2 - \mu_x]} \sum_{i=0}^{\infty} \{\alpha^2 \sigma_x^2 f_2(\tau)\}^i / i! - \mu_y^2 = \sum_{i=0}^{\infty} \{\lambda f_2(\tau)\}^i / i! - \mu_y^2 \quad (17)$$

$$\text{ここに } \lambda = \alpha^2 \sigma_x^2, \quad \sigma_y^2 = L_0^2 e^{\alpha[\alpha\sigma_x^2 - 2\mu_x]}$$

さらに議論を進めるためには $f_2(\tau)$ に具体的な関数を設定する必要がある。いま指数関数を考えることにすれば, $f_2(\tau) = e^{-\frac{\tau}{k}}$ 。このとき,

$$V_y(T_*) = \frac{2}{T_*} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i k^2}{i! i^2} \cdot (iT_* / k + e^{-iT_*/k} - 1) - \mu_y^2 \quad (18)$$

よって Sample Size による信頼度の減少は次式で評価できる。 $\sqrt{V_y(T_*)} / \mu_y$

比較のための例として, Fig. 4 に $x \in N(3, 1)$ なる入力が $y = 3 - x, 0$ (それぞれ $x \leq 3, x > 3$ に対して), および $y = 3e^{-x/2}$ なる評価関数を通じたのちの出力の p.d.f. を示す。

3. 適用例

ここでは (2-2) 節に述べた手法による理論解とシミュレーション結果との比較を行なう。 Fig. 5

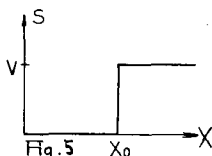


Fig. 5

のごとき最も一般的な貯水池操作方式を考える。すなわちダムが満水か空のときは流入量をそのまま放流し、それ以外のときは目標放流量を放流する。高次の非線型性のためにこのままでは解析不可能であるが、入力として $X \in N(\mu, \sigma^2)$ なる正規分布を仮定し、筆者らの提案した等価線型貯水池の手法^{1),2)}を適用することにより、一次近似としてつぎのような線型貯留システムが得られる。

$$S = aX, \quad \frac{\partial S}{\partial t} = I(t) - X(t) \quad (19)$$

ここに $a = V \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x_0 - \mu)^2}{2\sigma^2}}$, S : 貯留量, a : 線型貯留定数, V : 貯水池容量, $I(t)$: 流入量, $X(t)$: 放流量

流入量の自己相関係数を ρ , 放流量の自己相関係数を $R(\tau)$ とすれば, この等価線型システムからの放流量は近似的に $R(\tau) = e^{-\tau/(a+k)}$, $N(\mu, \frac{\sigma^2}{a+k})$ なる正規分布に従うであろう。ここに $k = (-1/\log \rho + 1/2) \Delta t$, これを $\Delta T = 0.9(a+k)$ なる時間単位で区切って, N 個のデータを作り, これを独立な系列とみなせば, この独立変数は近似的に $N(\mu, \frac{0.758 k \sigma^2}{a+k})$ なる正規分布に従う。(詳しくは 3) 参照) よってもとの時系列の長さを T とすれば, 放流量について,

$$N = \frac{T}{0.9(a+k)}, \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma \sqrt{\frac{0.758 k}{a+k}}} e^{-\frac{(x - \mu)^2}{2 \frac{0.758 k \sigma^2}{a+k}}} \quad (20)$$

(20) 式を (2-2) 節の各式に代入すれば必要な諸量が得られる。このようにして得られた理論解とシミュレーション結果を比較する。シミュレーション・ケースは Table-1 に示す。ここでシミュレートされたケースは, 実際の計画においては, 2ヶ月に1ヶ月湯水が生起するような場合から, 十年に1ヶ月生起するような場合までの非常に広範なケースを含んでいる。

まず等価線型貯水池では表わしえない実際の貯水池操作の非線型性を補正するために, 非線型変換の強度の尺度として a/k を選²⁾び, これと総不足量 S_n についての理論値に対するシミュレーション値の比 C との関係プロットしたものが Fig. 6 である。これより

$$[\sqrt{V(S_n)}/E(S_n)]' = C_{mv} \cdot \sqrt{V(S_n)}/E(S_n), \quad [E(S_n)]' = C_E \cdot [E(S_n)] \quad (21)$$

$$C_{mv} = 2.4(a/k)^{1/4}, \quad C_E = 0.46(a/k)^{-1/3} \quad (22)$$

ここに ' のついた量は, シミュレーション値あるいは補正された半理論値を示す。つかない量は理論値である。このようにして補正された理論値とシミュレーション値を比較した例が Fig. 7 である。

この図より本論文で示した手法が実用上十分な精度を有していることがわかる。

(参考文献) 1) A. Murota and T. Eto, "Effects of inadequacy of hydrologic data on reliability of water resources design", Proc. of 2nd I.S.H., Fort Collins, Col., U.S.A., Sept. 1972

2) 室田, 江藤, 吉岡, "等価線型貯水池システムについて", 第27回年講講演概要集, 昭47年10月

3) A. Murota and T. Eto, "Theoretical studies on T-type distribution and runs", 以下1)と同じ

Table 1 Simulation Cases

ρ : Correlation Coefficient of Input
 T : Sample Size of Original Data
 Input $X \in N(3, 1)$

$V = 1, 3, 15, 30$
 $X_0 = 3.0, 2.5, 2.0, 1.5, 1.0$
 $\rho = 0.0, 0.9$
 $T = 10, 100, 1000$

