

京都大学防災研究所 正員 石原 安雄
 同 上 正員 友杉 邦雄
 京都大学大学院 学生員 佐藤 基

1. まえがき 洪水に関係するような比較的短期間の降雨量の時間配分状況に関する統計則を究明するため、われわれはこれまでに、対象降雨期間を n 等分した各分割期間への配分雨量のうちの最大値が期間内全雨量に対して占める比率、すなわち最大配分率(以下等分最大配分率という)等について、雨量配分の純ランダム性の仮定のもとに、雨量をボール、分割期間を箱と考える数学モデルに基づき、それらの一般的な確率分布式を求め、その実証的検討を行なうとともに問題点等を明らかにした。^{(1), (2)}ここでは、同じ数学モデルに基づいて、洪水予測にとってより重要な情報である連続最大降雨に対応する連続最大配分率の確率密度関数等を求め、実測資料および等分最大配分率との比較検討を行ない、その意義、問題点等について述べる。

2. 連続最大配分率の理論分布 (I)数学モデル：降雨の時間配分の問題、すなわちある期間の雨量 r が与えられたとき、その期間の n 等分に当る n 個の分割期間の系列それぞれに配分される雨量 r_j ($j=1, 2, \dots, n$)の系列がどのようなになるかの問題は、 $x_j = r_j/r$ で定義される配分率 x_j の系列について考えることにより、より一般的となる。この x_j ($j=1, 2, \dots, n$)は次式

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1 \quad (x_j \geq 0) \quad \dots\dots\dots (1)$$

を満足し、また雨量配分の純ランダム性の仮定により、(1)式を満足する点 $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ のすべて(すべての可能な配分方法)は $(n-1)$ 次元空間に同じ確率測度をもって分布する。その全容積を $V_{n-1}(x)$ とすると、

$$V_{n-1}(x) = \int_0^1 \int_0^{1-x_1} \int_0^{1-x_1-x_2} \dots \int_0^{1-x_1-x_2-\dots-x_{n-2}} dx_{n-1} \cdot dx_{n-2} \cdot \dots \cdot dx_3 \cdot dx_2 \cdot dx_1 = \frac{1}{(n-1)!} \quad \dots\dots\dots (2)$$

となる。これが、いまわれわれが解析の対象とする数学モデルである。このモデルにおいて、各配分方法に対応する n 個の配分率 x_j ($j=1, 2, \dots, n$)に大きさの順位 i ($i=1, 2, \dots, n$)をつけた順位配分率($i=1$ なら等分最大配分率)の確率分布の一般式は既に得ている。⁽²⁾ここでは、このモデルに基づいて、つぎに定義する l/n 連続最大配分率の確率密度関数の誘導方法と結果等について簡単に述べる。

(II) l/n 連続最大配分率の確率密度関数：この l/n 連続最大配分率 y とは、(1)式を満足する n 個の配分率の系列 $\{x_j\}$ ($j=1, 2, \dots, n$)に対して、連続する l 個ずつの和($n-l+1$ 通りある)のうちの最大値であり、式で表わせばつぎのようなものである(ただし $n-l \geq l \geq 2$ で、 $l=1$ なら等分最大配分率に相当す)。

$$y = \max(x_1 + x_2 + \dots + x_l, x_2 + x_3 + \dots + x_{l+1}, \dots, x_{n-l+1} + x_{n-l+2} + \dots + x_n) \quad \dots\dots\dots (3)$$

この y の確率密度関数 $f_{n-l}(y)$ を求めるには、 $(n-l+1)$ 通りある l 個連続和のうちの少なくとも1つが y となる $(n-2)$ 次元空間の容積 $V_{n-2}(y)$ を求めればよい。仮定により、 $f_{n-l}(y)$ は $V_{n-2}(y)$ を(2)式の $V_{n-1}(x)$ で除したものである。しかし、 $V_{n-2}(y)$ を求めるのは、 n の大きさ、 y の値域等によって、積分範囲が複雑となり、一般には非常にめんどうな問題である。また $V_{n-2}(y)$ は一度に求めることはできず、 $(n-l+1)$ 個のうちのそれぞれについて、別々にそれが y となる場合の容積を求め、それらの和として求め

なければならない。ただし、対称性から、 j 番目の l 個連続和と $(n-l-j+2)$ 番目のそれとが y となる容積は相等しい。 つぎに、簡単な例として、 $n=4, l=2$ の場合について実際に求めてみよう。

まず、(1)式より $x_1+x_2+x_3+x_4=1$ ($x_j \geq 0$) (1)

(2)式より $y = \max(x_1+x_2, x_2+x_3, x_3+x_4)$ (2)

(3)式より $V_3(x) = \frac{1}{6}$ (3) である。

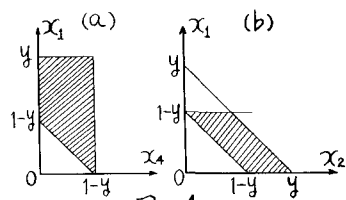


図-1

② $x_1+x_2=y$ ($x_3+x_4=1-y$) となる場合の容積 $V_2(x)$; この場合、独立変数は2つであり、それらを x_1 と x_4 とすれば、 $x_j \geq 0$ を考慮することにより、 $x_2=y-x_1$ から $0 \leq x_1 \leq y$, $x_3=1-y-x_4$ から $0 \leq x_4 \leq 1-y$ 。また(2)式より、 $x_2+x_3 \leq y$ でなければならないから、 $x_1+x_4 \geq 1-y$ ($x_3+x_4 \leq y$ からは $y \geq \frac{1}{2}$) が得られる。したがって、 (x_1, x_4) の存在範囲、すなわち $V_2(y)$ は、図-1の(a)に示す斜線部で、それはつぎのようになる。

$$V_2(y) = \frac{1}{2}(1-y)(3y-1) \quad (1 \geq y \geq \frac{1}{2}) \quad (4)$$

③ $x_2+x_3=y$ ($x_1+x_4=1-y$) となる場合の容積 $V_2(y)$; この場合、独立変数を x_1 と x_2 に選べば、 $x_j \geq 0$ を考慮して、 $x_3=y-x_2$ から $0 \leq x_2 \leq y$, $x_4=1-y-x_1$ から $0 \leq x_1 \leq 1-y$ 。さらに(2)より、 $0 \leq x_1+x_2 \leq y$ 、かつ $x_3+x_4 \leq y$ から $x_1+x_2 \geq 1-y$ でなければならない($y \geq 1-y$ より $y \geq \frac{1}{2}$)。したがって、 $V_2(y)$ は図-1の(b)に示す斜線部で、それはつぎのようになる。

$$V_2(y) = (1-y)(2y-1) \quad (1 \geq y \geq \frac{1}{2}) \quad (5)$$

④ $x_3+x_4=y$ ($x_1+x_2=1-y$) となる場合の容積 $V_2(y)$; これは対称性から $V_2(y)$ に等しい。

したがって、 $V_2(y) = V_2(y) + V_2(y) + V_2(y) = (1-y)(5y-2)$ となり、これを(3)式で除して、 $n=4, l=2$ の場合の y の確率密度関数 $f_{4,2}(y)$ がつぎのように得られる。

$$f_{4,2}(y) = 6(1-y)(5y-2) \quad (1 \geq y \geq \frac{1}{2}) \quad (6)$$

さて、この場合は y の下限値は $\frac{1}{2}$ であったが、たとえば $n=5, l=2$ の場合は $\frac{1}{3}$, $n=7, l=2$ なら $\frac{1}{4}$ となり、一般に $\frac{n}{2}$ が $m \geq \frac{n}{2} > m-1$ (m は自然数) であれば y の下限値は $\frac{1}{m}$ となる。そして $f_{n,l}(y)$ は自然数の逆数値のところでその関数形が異なる。表-1 は $n=3 \sim 6, l=2 \sim (n-1)$ に対する $f_{n,l}(y)$ を示したものであり、 $n=5$ の $l=2$, あるいは $n=6$ の $l=2$ では、 $1/2 \geq y \geq \frac{1}{2}$ と $1/2 \geq y \geq \frac{1}{3}$ では関数形が異なることがわかるであらう。図-2 は表-1 に示

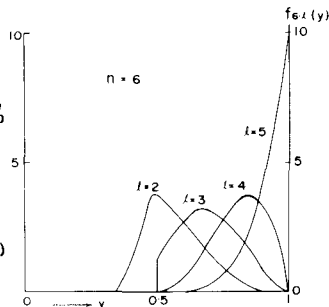


図-2

表-1

n	l	$f_{n,l}(y)$	y の値域
3	2	$4(2y-1)$	$1 \geq y \geq \frac{1}{2}$
4	2	$6(1-y)^2 + 18(1-y)(2y-1)$	"
	3	$6(2y-1)^2$	"
5	2	$24(1-y)^3 + 48(1-y)^2(2y-1)$	"
	3	$24(3y-1)^3$	$\frac{1}{2} \geq y \geq \frac{1}{3}$
6	2	$24(1-y)^4 + 36(1-y)(2y-1)^2$	$1 \geq y \geq \frac{1}{2}$
	3	$8(2y-1)^3$	"
6	2	$60(1-y)^4 + 100(1-y)^3(2y-1)$	"
	3	$20(1-y)^3(7y-2) - 20(1-2y)^3(7y-2)(11y-1)$	$\frac{1}{2} \geq y \geq \frac{1}{3}$
6	4	$30(1-y)^4 + 120(1-y)^3(2y-1) + 120(1-y)^2(2y-1)^2$	$1 \geq y \geq \frac{1}{2}$
	5	$60(1-y)^2(2y-1)^2 + 60(1-y)(2y-1)^3$	"
6	5	$10(2y-1)^4$	"

した $f_{6,2}(y)$ を $l=2 \sim 5$ に対してグラフで示したものである。

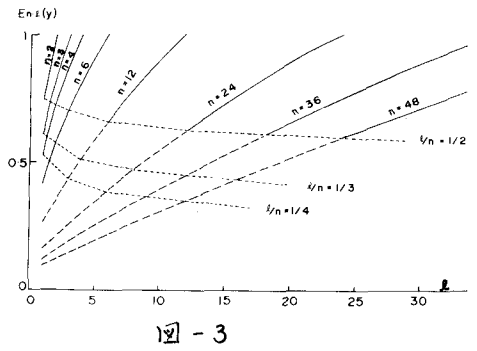
このように $n=6$ まででは完全解を得たわけであるが、ことに $n=6, l=2$ の場合の $\frac{1}{2} \geq y \geq \frac{1}{3}$ のところでは、積分範囲が非常に複雑で、われわれの思考の限界に近く、また多大の労力を要した。しかし、このような結果から、一般式を帰納したいわけであるが、これだけでは不足である。ただ、 $1/2 \geq y \geq \frac{1}{2}$ の場合は比較的考え易く、 $n=12$ の場合まで求めることができた。その結果、 $1/2 \geq y \geq \frac{1}{2}$ に対して、つぎのような $f_{n,l}(y)$ の一般式を帰納的に得た。

$$f_{n,l}(y) = \sum_{j=1}^l j(j+1) \binom{2n-j}{n-j} \binom{n-1}{2n-j} (1-y)^{2n-j-1} (2y-1)^{n-2k+j-1} \quad (ただし k=n-l) \quad (7)$$

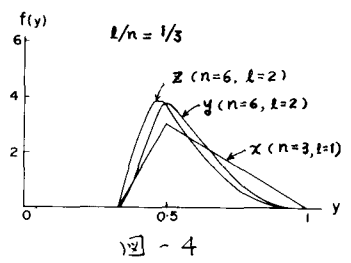
(Ⅲ) l, n の変化による期待値の変化と考察：以上に得た(7)式は、 $l \geq \frac{n}{2}$ の場合に対しては、 y の下限値が $\frac{1}{2}$ であることから、完全解である。したがって $l \geq \frac{n}{2}$ の場合の期待値 $E_{n,l}(y)$ の一般式が得られ、つぎのようになる。

$$E_{n,l}(y) = \frac{l}{n} + \frac{1}{2n} \sum_{j=1}^{\frac{n}{2}} \frac{j^2(i+1)}{(2k-j)2^{2k-j}} (2k-j) \quad \left(\text{for } l \geq \frac{n}{2} \right) \dots\dots (8)$$

 $(k=n-l)$
 $l < \frac{n}{2}$ の場合に対する期待値は、 n が 6 以下の場合を除いて、いまのところ不明であるが、たゞ $l=1$ の場合すなわち等分最大配分率の期待値は一般的に得られているので、 $2 \leq l < \frac{n}{2}$ に対する期待値を比較的容易に推定できる。図-3 は n をパラメータとして、



l による $E_{n,l}(y)$ の変化を図示したものである。ここに、実線は(8)式および表-1の $f_{n,l}(y)$ から計算した値で、破線は $l=1$ の値を用いて内挿した推定値である。なお、点線は $l/n = \text{const.}$ に対する $E_{n,l}(y)$ を結んだものであり、 n が大きくなるにつれて、それは単調減少することがわかるが、その $n \rightarrow \infty$ における極限值は不明である。たゞ、(8)式より、その極限値は $\frac{l}{n}$ 以上であるといえる。ところで、いま重要なのは極限値がどうなるかではなく、 n が大きくなると $l/n = \text{const.}$ に対する $E_{n,l}(y)$ が小さくなるという事実である。実は、この点に関して、つぎに述べような錯覚によって、逆の結果を予想していた。すなわち、たとえば、ある期間の $n=3$ 等分による配分率の系列 (x_1, x_2, x_3) のうちの最大値 x (等分最大配分率であり、 $n=3, l=1$ の場合である) と、それと同じ期間の $n=6$ 等分による配分率の系列 $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$ における重複を許さない組の 2 個連続組のうち最大値 $z = \max(x_1+x_2, x_2+x_3, x_3+x_4, x_4+x_5, x_5+x_6)$ とが見かけ上同じものであることによる。そのため、 $n=6, l=2$ の $y = \max(x_1+x_2, x_2+x_3, x_3+x_4, x_4+x_5, x_5+x_6)$ は明らかに z 以上であることから、 $l/n = \text{const.} = \frac{1}{3}$ であるものとして、 n の小さい x の期待値より、 n の大きい y の期待値の方が大きくなるであろうと予想したのである。しかし、 x と y の確率分布は全く異なるためこの予想は誤りであった。図-4 は、この例の x, y およびその確率密度関数の差異を示したものである。さて、すると、“ n が大きくなると $l/n = \text{const.}$ に対する $E_{n,l}(y)$ が小さくなる”という事実はどうように解釈すればよいであろうか。それは、 y がいわば移動平均の最大値であることと、雨量配分の純ランダム性の仮定を考えれば、むしろ当然の結果といえるのではないだろうか。



3. 実測資料との比較と検討

(I) 降雨資料の概要：このような統計解析では、資料の選

び方に慎重を要するわけであるが、1 地点では数多く得難いことと、同一の降雨原因でも地点間がある程度離れているとハイトグラフの形状が全く異なることが多いことに着目して、ここではつぎのものを選んだ。それは、淀川水系に散在する合計約 150 個所の時間雨量観測所による 9 年の降雨(これらはほとんど台風性で、その生起年月日は表-2に示す)の記録から抽出した計 556 通りの 12 時間連続降雨であり、これらを観測地点の区別を無視して 1 つの標本集合としたわけである。なお、これらの 12 時間降雨の雨量はほとんど 100 mm 以上である。また、12 時間降雨を選んだ理由は、降り続く雨として、比較的数多く得やすいからで、他にそれほど深い意味はない。

表-2

年(昭和)	月	日
28	9	25
29	6	29-30
29	7	6
29	9	18
31	9	26-27
33	8	25
33	9	26
34	8	13
34	9	26

(Ⅲ)連続最大配分率の比較検討: $\frac{1}{n}$ 連続最大配分率の理論分布は $\frac{1}{12}$ についてしか得られていないので、分布についてはその範囲で実測のものと比較した。その結果が図-5で、実線が実測降雨の $\frac{1}{12}$ ($l=6 \sim 11$ hr) 連続最大配分率の相対頻度分布、破線が(7)式から得られる理論相対頻度分布である。この図は、実際の降雨の連続最大配分率の方が大きくなる場合が多いことを示している。しかし、理論と実測の分布形がよく相似している点は非常に興味深い。

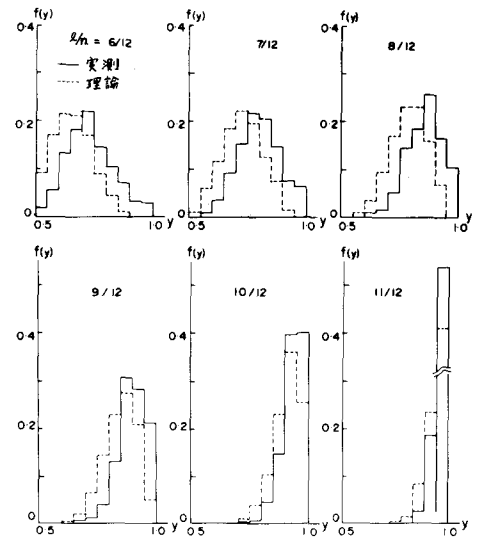


図-5

つぎに、図-6は実測降雨の $\frac{1}{12}$ ($l=6 \sim 11$ hr) 連続最大配分率の平均値 $\bar{y}$ (x印) と、(8)式および内挿によって得られた理論的期待値 $E_{12-l}(y)$ (○印)、および等分最大配分率の期待値 $E_n(x)$ (●印で、 $\frac{1}{12} = \frac{1}{n}$ とし、 n が整数でない場合まで拡張したもの) を比較したものである。 $l=1$ の場合を除いて、 $\bar{y}$ の方が $E_{12-l}(y)$ より大きくなっていることがわかる(別資料による解析では $l=1$ の場合も大きかった)。このことは、実際の降雨は、少なくとも1時間単位でみれば、純ランダムではなく、強い雨はある程度持続する傾向があることを示唆している。また、この図は、全体的に $E_n(x)$ の方が $E_{12-l}(y)$ より $\bar{y}$ に近いことを示しているため、連続最大配分率の期待値 $\bar{y}$ だけが必要な場合は $E_n(x)$ で近似できると考えられる。しかし、 $E_n(x)$ の方が $\bar{y}$ に近い理由は、単に、2.の(Ⅲ)で述べたように、 $\frac{1}{n} = \text{const}$ に対する $E_n(y)$ は n が大きいほど小さい(この場合 $E_n(x) > E_{12-l}(y)$) のためで、かつ、その差が、 $\bar{y}$ と $E_{12-l}(y)$ との差とほぼ同じであるためであり、等分最大配分率 x の確率分布と、実際の y の確率分布は全く異なることに注意しなければならない(たとえば $\frac{1}{n} = \text{const} = \frac{1}{2}$ の場合の x の分布は矩形形であるが、 $\frac{1}{n} = \frac{1}{12} = \frac{1}{2}$ の y の分布は図-5の左上端のようである)。

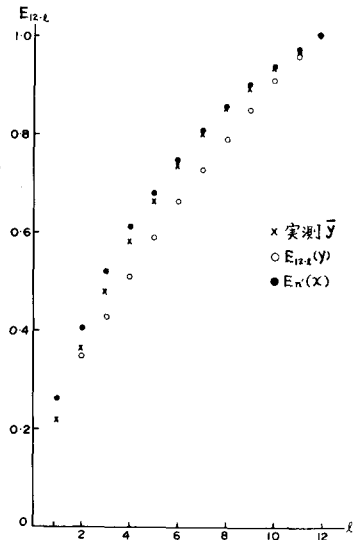


図-6

4. あとがき

以上に、雨量配分の純ランダム性の仮定のもとに連続最大降雨に対応する連続最大配分率の理論分布を求め、12時間降雨の記録についてその適合性を検討した結果、(1)実測の方が理論より大きめの値をとる傾向があるが、(2)分布形は相似していること、(3)期待値だけに注目するならば等分最大配分率の方が近似度がよいこと等がわかった。そして、連続最大配分率の考え方は、等分最大配分率の場合と違って、降雨を時系列としてとらえているため、実際の降雨には持続性があることをより判然とせしめたとはいえよう。しかし、ここで用いた資料はほとんど台風性降雨であることが問題であり、さらに広範な資料による解析が必要であろう。また、ここでは12時間降雨を分割数 $n=12$ (すなわち1時間単位の雨) として解析したが、 n のとり方の問題も検討しなければならない。

参考文献 1) 石原安雄・友杉邦雄; 降雨の時間配分に関する確率論的考察, 京都大学防災研究所年報, 第14号B, 昭46.

2) 石原安雄・友杉邦雄; 雨量の時間配分に関する統計的的研究, 土木学会第25回年次講演会講演要旨, 昭46.