II-114 水資源計画における時間単位に関する研究（第１報）
——水文資料の確率分布との関係——

大阪大学工学部 正 員 室田 明
大阪大学大学院 学生員 江藤 剛治
同 学生員○田中 剛

1. まえがき

水文量時系列の統計的特性は，時間単位のとりかたによって変化し，そのとり扱いかたも必然的にかえなければならない。既往の多くの研究において，種々の時間単位に対して水文量の統計的特性が調べられているが，筆者らは時間単位との関連から，それらを統一的に説明しようと試みている。

一般に水文量の統計的特性は，確率分布と時系列特性（持続性や周期性など）の２つにより特性づけられると考えられるが，本論文はこのうち時間単位と確率分布の関係について論じたものである。本論文では水文量の確率分布はガンマ分布で近似できるものとし，ガンマ分布の２つのパラメーター α（形状母数），β（尺度母数）が時間単位の変化とともにどのように変るかを示す式を導いた。この解は１次マルコフ過程をなす従属な時系列に対しても適用可能であるし，降水量時系列のごとく確率分布関数に飛躍をともなうような時系列（無降水，降水の２つの事象を含むので，雨量が‘0’なる点で確率分布が飛躍する。Fig.(2) 参照）に対してさえ適用可能である。これらの解を，雨量資料（大阪管区気象台観測，1901年～1970年），流量資料（淀川水系木津川，月ヶ瀬地点，1918年～1965年）に適用した結果と，実測値より得られる結果は，実用上十分な精度で一致した。

2. ガンマ分布に従う２変数の和の分布

筆者らは参考文献１）において，ガンマ分布に従う２変数の和の分布もまたガンマ分布で近似できることを示した。その内容を要約しておく。

一般に河川流量，降水量などの確率密度関数はつぎのようなガンマ分布であらわされる。

$$f(x;\alpha,\beta)=\frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\cdot x^{\alpha-1}\cdot e^{-\beta x} \qquad (1)$$

ただし $0\leq x\leq\infty$, $\Gamma(\alpha)=\int_0^{\infty}x^{\alpha-1}\cdot e^{-x}dx$

ここで $\alpha=\frac{\mu^2}{\sigma^2}$；形状母数，$\alpha>0$ ，$\beta=\frac{\mu}{\sigma^2}$；尺度母数，$\beta>0$，$\mu$；平均値，$\sigma^2$；分散

(1)式で示される確率密度関数の概形は，$\alpha\leq1$ のとき 逆J字形分布（特に，$\alpha=1$ のとき指数分布），$\alpha>1$ のとき 歪んだ釣鐘状分布，$\alpha\gg1$ のとき 正規分布に近づく。またその積率母関数 $g(\theta)$ は次式であらわされる。

$$g(\theta)=(1-\theta/\beta)^{-\alpha} \qquad (2)$$

(1)式で示すように，ガンマ分布の分布形は α，β なる２つの母数により特徴づけられる。今，X_1，X_2 が互いに独立でそれぞれ $f(x;\alpha_1,\beta_1)$，$f(x;\alpha_2,\beta_2)$ なる確率密度関数に従うとき，$X(=X_1+X_2)$ の積率母関数 $g(\theta)$ は，X_1，X_2 の積率母関数の積で表わされる。

$$g(\theta)=(1-\theta/\beta_1)^{-\alpha_1}\cdot(1-\theta/\beta_2)^{-\alpha_2} \qquad (3)$$

(3)式より $\beta_1=\beta_2$ のとき，X は $(\alpha_1+\alpha_2)$，$\beta_1(=\beta_2)$ を母数とするガンマ分布に従うが，一般には $\beta_1\neq\beta_2$

であるのでXは厳密にはガンマ分布には従わない。しかし一般にはXの分布もまた，ガンマ分布で近似できると考えられるので，この近似的ガンマ分布の母数をα_*，β_*とすると，次式のようになる。

$$\alpha_* = \frac{(\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1)^2}{(\alpha_1\beta_2^2+\alpha_2\beta_1^2)} \quad , \quad \beta_* = \frac{\beta_1\beta_2(\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1)}{(\alpha_1\beta_2^2+\alpha_2\beta_1^2)} \qquad (4)$$

$f(x;\alpha_1,\beta_1)$，$f(x;\alpha_2,\beta_2)$の重畳（convolution）の数値積分によってもとめたXの確率密度関数の厳密解と，(4)式より得られる近似的母数をもつXの確率密度関数の比較の例をFig.(1)に示す。この例は$\alpha_1=1.0$，$\beta_1=2.0$，$\alpha_2=0.5$，$\beta_2=1.0$の場合である。この図に見られるように両者はほとんど完全に一致しており(4)式の近似解は実用上十分な精度を有することがわかる。

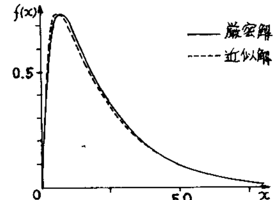

Fig.(1)

つぎに日降水量のように時間単位の小さい降水量の確率分布関数は'0'点において飛躍をもつ，すなわち降水量0（無降水）の確率が存在する。従ってこのような場合の確率分布関数$F(x)$は次式のごとくあらわされる。（Fig.(2)参照）

$$F(x) = (1-p) + p\int_{-\infty}^{x} f_R(x)\,dx \qquad (5)$$

ここにpは降水確率，$f_R(x)$は降水が生起したという条件つきの降水量Xの確率密度関数．

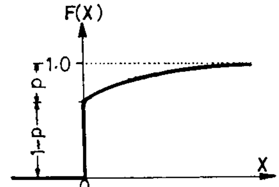

Fig.(2)
'0'点で飛躍（1−p）をもつ確率分布関数

X_1，X_2の降水確率がp_1，p_2；降水条件つき確率密度関数が母数α_1，β_1；α_2，β_2なるガンマ分布であらわされるとき，$X(=X_1+X_2)$の降水確率p，およびガンマ分布の母数α，βは，X_1，X_2のそれぞれに関して降水事象，無降水事象の各々の組みあわせを考えることより，

$$\left.\begin{aligned} p &= p_1+p_2-p_1p_2 \\ \alpha &= \mu^2/(\nu_2-\mu^2) \quad , \quad \beta = \mu/(\nu_2-\mu^2) \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

ここに，
$$\mu = \frac{1}{p}\left\{(1-p_1)p_2\frac{\alpha_2}{\beta_2} + p_1(1-p_2)\frac{\alpha_1}{\beta_1} + p_1p_2\frac{\alpha_*}{\beta_*}\right\}$$
$$\nu_2 = \frac{1}{p}\left\{(1-p_1)p_2\frac{\alpha_2(\alpha_2+1)}{\beta_2^2} + p_1(1-p_2)\frac{\alpha_1(\alpha_1+1)}{\beta_1^2} + p_1p_2\frac{\alpha_*(\alpha_*+1)}{\beta_*^2}\right\}$$

(6)式によりXの確率分布の母数p，α，βは計算できる。

3．多変数の和の分布

たとえばX_iは才i日（$i=1,2,\cdots\cdots,n$）の水文量をあらわし，Xはそれらn日間の和をあらわす変数とする。またX_iは平均μ_i，分散σ_i^2で，母数$\alpha_i(=\mu_i^2/\sigma_i^2)$，$\beta_i(=\mu_i/\sigma_i^2)$をもつガンマ分布に従うとし，$X(=X_1+X_2+\cdots\cdots+X_n)$の母数は添字'$*$'をつけて区別する。

i) X_i（$i=1,2,\cdots\cdots,n$）の系列が従属定常である（即ち，$\mu_i=\mu$，$\sigma_i^2=\sigma^2$（$i=1,2,\cdots\cdots,n$）とおける）場合，

$$\left.\begin{aligned} \mu_* &= \mu_1+\mu_2+\cdots\cdots\cdots+\mu_n = n\mu \\ \sigma_*^2 &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\rho_{ij}\cdot\sigma\{X_i\}\cdot\sigma\{X_j\} \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

ここに$i=j$のとき，$\rho_{ii}=1$，$i\neq j$のときρ_{ij}はX_iとX_jの相関係数である。

ここでX_i（$i=1,2,\cdots\cdots,n$）の系列を1次マルコフ過程であるとすると

$$\rho = \rho_{i,i+1} \quad , \quad \rho_{ii'} = \rho^{i'-i} \qquad (i=1,2,\cdots\cdots,n) \qquad (8)$$

このときXの分散は

$$\sigma_*^2 = \{n+2(n-1)\rho+\cdots\cdots\cdots+2\rho^{n-1}\}\sigma^2$$

$$= \sigma^2 (n - 2\rho - n\rho^2 + 2\rho^{n+1}) / (1-\rho)^2 \tag{9}$$

従って，$\alpha = \frac{\mu^2}{\sigma^2}$，$\beta = \frac{\mu}{\sigma^2}$ より

$$\alpha_* = \frac{\mu_*^2}{\sigma_*^2} = \frac{n^2(1-\rho)^2}{(n-2\rho-n\rho^2+2\rho^{n+1})}\alpha \quad , \quad \beta_* = \frac{\mu_*}{\sigma_*^2} = \frac{n^2(1-\rho)^2}{(n-2\rho-n\rho^2+2\rho^{n+1})}\beta \tag{10}$$

ii)つぎに，前項でも述べたごとく，X_iが'0'点で飛躍$(1-p_i)$，$(i=1,2,\cdots\cdots,n)$をもつ場合について，Xの降水確率P_*，降水条件つきの分布の平均値，および分散をμ_*, σ_*^2とする。

$$P_* = 1 - \prod_{i=1}^{n}(1-p_i) \tag{11}$$

$$\mu_* = \sum_{i=1}^{n} p_i \mu_i / p_* \tag{12}$$

Xの分散σ_*^2は，つぎのようにして得られる。まず$\mu' = \sum_{i=1}^{n}\mu_i$とおいて，$X$の$\mu'$まわりの2次モーメントは

$$E\{(X-\mu')^2\} = E\{[(X-\mu_*)+(\mu_*-\mu')]^2\} = E\{(X-\mu_*)^2\} + 2E\{(X-\mu_*)(\mu_*-\mu')\} + E\{(\mu_*-\mu')^2\}$$
$$= P_*\sigma_*^2 + (1-P_*)\mu_*^2 + 2(\mu_*-\mu')\{P_*\mu_*\} - 2\mu_*(\mu_*-\mu') + (\mu_*-\mu')^2 \tag{13}$$

また，

$$E\{[(X_1-\mu_1)+(X_2-\mu_2)+\cdots\cdots\cdots+(X_n-\mu_n)]^2\} = \sum_{i=1}^{n} E\{(X_i-\mu_i)^2\} + 2\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{i'=i+1}^{n} E\{(X_i-\mu_i)(X_{i'}-\mu_{i'})\}$$
$$= \sum_{i=1}^{n}(p_i\sigma_i^2 + (1-p_i)\mu_i^2) + 2\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{i'=i+1}^{n}(1-p_i)(1-p_{i'})\mu_i\mu_{i'} \tag{14}$$

(13)式，(14)式より，

$$\sigma_*^2 = \frac{1}{P_*}\Big[\sum_{i=1}^{n}\{p_i\sigma_i^2 + (1-p_i)\mu_i^2\} + 2\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{i'=i+1}^{n}(1-p_i)(1-p_{i'})\mu_i\mu_{i'} - (1-P_*)\mu_*^2 + 2(\mu_*-\mu')(1-P_*)\mu_*$$
$$-(\mu_*-\mu')^2\Big] \tag{15}$$

(12)式，および(15)式より，Xの降水条件つきの確率密度関数の~~母数~~α_*，β_*は

$$\alpha_* = \mu_*^2/\sigma_*^2 \quad , \quad \beta_* = \mu_*/\sigma_*^2 \tag{16}$$

によって計算できる。

とくに，X_i $(i=1,2,\cdots\cdots,n)$が定常時系列の場合，

$$\left.\begin{aligned} P_* &= 1-(1-p)^n \\ \mu_* &= np\mu/P_* \\ \sigma_*^2 &= \frac{1}{P_*}[n\{p\sigma^2+(1-p)\mu^2\} + n(n+1)(1-p)^2\mu^2 - (1-P_*)\mu_*^2 \\ &\quad + 2(\mu_*-n\mu)\cdot(1-P_*)\mu_* - (\mu_*-n\mu)^2] \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

となる。α_*，β_*は(16)式によって計算できる。

nが十分大になると，(10)式においては，$n(1-\rho^2) \gg 2\rho - 2\rho^{n+1}$より，

$$\alpha_* = n\frac{1-\rho}{1+\rho}\alpha \quad , \quad \beta_* = \frac{1-\rho}{1+\rho}\beta \tag{18}$$

(16)式においては，定常時系列の場合を考えると，$P_* = 1-(1-p)^n \longrightarrow 1$より，

$$\alpha_* = np^2\mu^2/\{p\sigma^2 + (1-p)(2-p)\mu^2\} \quad , \quad \beta_* = p\mu/\{p\sigma^2 + (1-p)(2-p)\mu^2\} \tag{19}$$

となる。(18)式，(19)式からnが増大するにつれて，αはnに比例し直線に，βは定数に漸近する。また(19)式において$p \to 1$とするとき，(すなわち，'0'点において飛躍がない場合)，あるいは(10)式において$\rho \to 0$とするときは，一般の独立な確率変数の和の分布の場合に一致する。(このとき，$\alpha_* = n\alpha$，$\beta_* = \beta$)

以上によって，ガンマ分布に従う多変数の和の確率密度関数の近似解が，1次マルコフ過程をなす従属な系列，および確率分布関数が飛躍をもつ系列について得られた。これから，時間単位の小さい資料から，時間単位を大きくしていく場合，水文量の分布特性がどのように変化するかを知ることが

できる。

4. 観測資料への適用結果とその検討

以上の近似解を雨量資料および流量資料について適用し，実測値と比較，検討を行なった。Fig.(3)は大阪における8月の日雨量資料をもとに各時間単位に対する母数P_*，α_*，β_*を(16)式によって計算し，8月の期間内で平均値を求めたものである。この図から，10日以上の時間単位に対する雨量資料の場合，降水確率はほとんど1に近く，無降水確率による確率分布関数における'0'点の飛躍を考慮しなくてもよい。Fig.(4)は木津川，月ヶ瀬地点における，8月の半旬流量資料から得られる各半旬に対する形状母数，尺度母数の平均値α，βとして(10)式より求めたα_*，β_*を示す。Fig.(5)は大阪における月雨量資料から得られる各月の形状母数，尺度母数の平均値をα，βとして(10)式より求めたα_*，β_*を示す。これらの図において，実測資料より直接計算される各パラメーターは点で，理論値は線で示されている。

i) Fig.(3)～Fig.(5)からわかるように，近似解と実測値はよく一致しており，前項の近似解が実用上十分な精度をもつことを示している。ただ，Fig(5)において，6ヶ月以上の時間単位に対する雨量資料の和の確率分布は，近似解と一致していない。　ii) また，(18)式および(19)式で示されたように，nが大なるにつれてα_*は直線（図上では点線で示す）に漸近し，β_*はnに関係なく定数に漸近することが示される。　iii) Fig.(5)より，4ヶ月以上の雨量資料の場合$\alpha \gg 1$となり，ほぼ正規分布に従うとみなしえるであろう。

参考文献　1) 室田，江藤，田中："時間単位と水文量の統計的特性との関係について"
昭和47年度関西支部年講概要，　昭和47年6月，

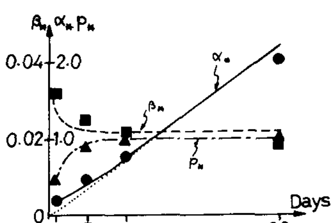

Fig.(3)

Parameters of the p.d.f. of sum of daily precipitation data. (Osaka, Aug.)

Legends

observed	theoretical
α ; ●	α_* ; ———
β ; ■	β_* ; - - - - -
P ; ▲	P_* ; —-—--

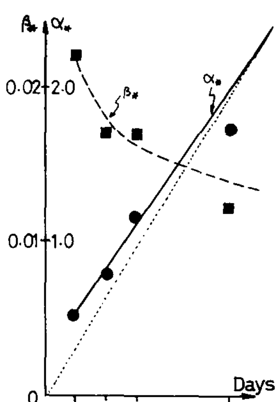

Fig.(4)

Parameters of the p.d.f. of sum of 5-days discharge data. (R.Kizu, Aug.)

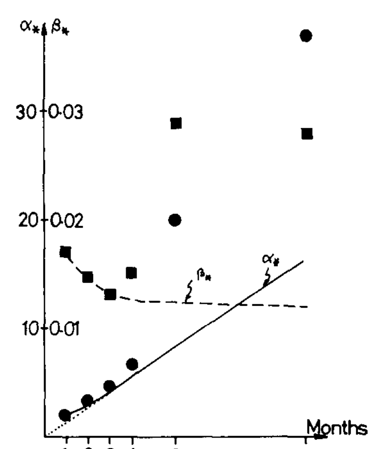

Fig.(5)

Parameters of the p.d.f. of sum of monthly precipitation data. (Osaka)