

1. 緒言

管内振動流に於ける流いの挙動、とりわけ層流から乱流への遷移、乱流時速度分布、乱いの構造等を明らかにすることは調圧水槽の水面振動や、液動に伴う境界層等との関連上、多くの示唆を与え得るものと予想される。本論文では管内振動流の構造と自由振動の減衰率とが相互に密接な関係と有ることを着目し、自由振動を決定する複素角速度が層流時には無次元管径 $r = r_0 \sqrt{\frac{\rho}{\mu}}$ により支配されるという前報⁽¹⁾の結果を引き続き、層流解の適用限界、流動粘性係数 ε の仮定に基づく乱流時減衰率、及び連経管内自由振動に対する運動量方程式の適用性を考察した。

2. (1) 筒座標に於けるナビア・ストークス方程式

一様管路に於いて管軸が複雑な曲線と形成する場合には(1)筒座標による運動方程式を用いることは出来ない。ここでは(1)筒座標と近似出来る場合を考察する。一様断面の流いの軸対称性を仮定により軸方向成分に於けるナビア・ストークス方程式は次式で表わされる。

$$\frac{\partial U_z}{\partial t} = -g \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{p}{\rho g} + h \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\tau}{\rho} \right) \quad (2.1)$$

管内半径 r_0 、管壁剪断応力 τ_0 、マッハ速度 $U_0 = \sqrt{\frac{E_0}{\rho}}$ とはいて式(2.1)を無次元化し、角速度 ω の周期解と予想したは式(2.1)は次式に変形される。ここに $r_* = \frac{r}{r_0}$ 、 $\tau_* = \frac{\tau}{\tau_0}$ と表わす。

$$i\omega \frac{r_0}{U_0^2} U_z = \frac{r_0 g}{U_0^2} I + \frac{1}{r_*} \frac{\partial}{\partial r_*} (r_* \tau_*) \quad (2.2)$$

式(2.2)に於ける記号 i は虚数単位を表わす。重力勾配 $I = -\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{p}{\rho g} + h \right)$ 、及びマッハ速度 U_0 は r_* とは無関係と考慮されるから r_* で微分し $\frac{\tau_*}{\rho} = \varepsilon \frac{\partial U_z}{\partial r}$ により U_z を消去する。また $\eta = \chi_0 r_*$ 、 $\chi_0 = r_0 \sqrt{\frac{i\omega}{\varepsilon}}$ の変換により式(2.2)は次式に変換される。

$$\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} (\eta \tau_*) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \eta} (\eta \tau_*) + \eta \tau_* = 0 \quad (2.3)$$

式(2.3)の一般解は第一種及び第二種ベッセル関数を用いて $\eta \tau_* = A_1 \eta J_1(\eta) + B_1 \eta Y_1(\eta)$ と表わされる。管壁上での τ_* の有限性より $B_1 = 0$ 、また $\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \eta} \{ \eta A_1 J_1(\eta) \} = A_1 J_0(\eta)$ の関係と式(2.2)に代入し管壁上で $U_z = 0$ の条件より $A_1 = -r_0 g I / \{ U_0^2 \chi_0 J_0(\chi_0) \}$ が得られる。よって流速 U_z 、剪断応力 τ 、断面平均流速 V は次式で表わされる。

$$U_z = -\frac{r_0 g I}{\omega} \left\{ 1 - \frac{J_1(\eta)}{J_1(\chi_0)} \right\} \quad (2.4)$$

$$\frac{\tau}{\rho} = -\frac{r_0 g I}{\chi_0} \frac{J_1(\eta)}{J_1(\chi_0)} \quad (2.5)$$

$$V = -\frac{g I}{i\omega} \left\{ \frac{2}{\chi_0} \frac{J_1(\chi_0)}{J_0(\chi_0)} - 1 \right\} \quad (2.6)$$

自由減衰振動に於ける複素角速度 ω は未定であるから、一様管路の断面平均流速 V と、自由水面の

上昇速度との関係から求めなければならない。動粘性係数 ε は層流に対しては ν を、また乱流に対しては湍流(2)や Hinze(3)を参考にして $\varepsilon = \alpha \hat{v}_0 r_0$ と置く。ここに $\hat{v}_0$ はマッソ速度 v_0 の振動を表わしたものとす。

3.1 U字管内自由振動流に関する層流解

實際一管の自由振動流に於ける圧力分布をポテンシャル流に於けるそれと近似させるため、軸対称性と管軸方向への一様性の仮定に基づきラプラス方程式を変形して $\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0$ となる。自由水面からU字管底辺部にある場合、管軸方向への水面の変位を ξ で表わせば、 $z = \xi$ で $\frac{p}{\rho g} + h = h_0 - \xi$ 、 $z = (-\xi)$ で $\frac{p}{\rho g} + h = h_0 + \xi$ の条件を与えれば、圧力分布は次式で表わされる。

$$\frac{p}{\rho g} + h = h_0 + \left(\frac{2z}{r} - 1\right)\xi - \frac{2}{r}\xi^2$$

よって、非粘性U字管振動の角速度 n から $n^2 = \frac{2g}{r}$ で表わされることを考慮すれば、動水勾配 I は、次式で表わされる。即ち $I = -\frac{n^2}{g}\xi$

自由振動を表わす複素角速度 ω と、非粘性振動角速度 n との関係で無次元化し、 $\Omega = \frac{\omega}{n}$ と表わせば断面平均流速 V と自由水面の上昇速度との関係、即ち $V = i\omega\xi$ より、次式が得られる。

$$-\Omega^2 = \frac{2}{\chi_0} \frac{J_1(\chi_0)}{J_0(\chi_0)} - 1 = \frac{J_2(\chi_0)}{J_0(\chi_0)} \quad \dots \dots \dots (3.1)$$

$$\chi_0 = r\sqrt{-i\Omega} \quad r = r_0\sqrt{\frac{n}{\Omega}} \quad \dots \dots \dots (3.2)$$

式(3.1)、(3.2)より Ω を消去すれば解くべき方程式として次式が得られる。

$$\chi_0^4 \frac{J_0(\chi_0)}{J_2(\chi_0)} = r^4 \quad \dots \dots \dots (3.3)$$

式(3.3)より χ_0 、 r が数値的に解かれない。式(3.2)より無次元角速度 Ω 、よって $\frac{\omega}{n} = \frac{\omega_r}{n} + i\frac{\omega_i}{n}$ が求まり、減衰率 $= \exp(-\frac{2\pi\omega_i}{\omega_r})$ 、また周期 $T = \frac{2\pi}{\omega_r}$ により減衰率及び周期の計算はされる。層流解の適用性について前報(4)で述べた。

3.2 U字管内振動流の層流からの遷移

管内振動流に於ける層流からの遷移は、特性速度及び特性長と適切に関連する。それと等しくレイノルズ数 Re 或る限界値に達するとともに生じると予想される。波動境界層の遷移に於ける Brehner(4) 及び Collins、また振動板に於ける Huan Li(5)、Manohar 等の結果を参考にし特性長は $\delta = \sqrt{\frac{2\nu}{n}}$ 、特性速度は非粘性U字管振動に於ける水面上昇速度の振動 $\hat{v}_0$ と選ぶならば、それと等しくレイノルズ数は $\hat{v}_0 \sqrt{\frac{n}{\nu}}$ で表わされる。レイノルズ数と減衰率との関係を実験により求めたもの(図-1)とあり、同図により実験の減衰率が層流解からズレ始める点を求めたものは $(\hat{v}_0 \sqrt{\frac{n}{\nu}})_c = 300$ となる。管内定常流に於けるレイノルズ数に換算すれば、 $\frac{V_{max} \cdot 2r_0}{\nu}$ の値は 9800 から 32000 の範囲で遷移が生じていることになる。

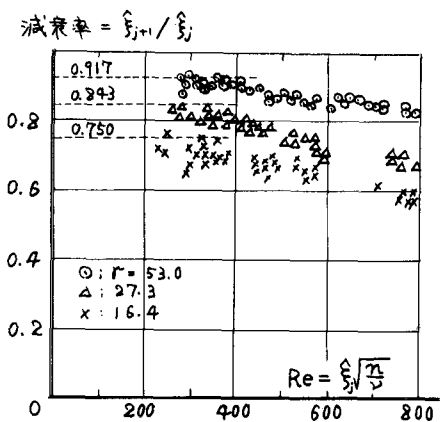


図1 層流解からのズレ

3.3 U字管の自由振動に於ける乱流解

振動するU字管の乱流に於ける振動粘性係数 ε の分布に於ける定数は確立されていないと思われ、乱流振動境界層に於ける根拠⁽²⁾のモデルと、Hinze⁽³⁾に引用されているLauferによるU字管の定常流に於ける ε の実測例を参考に、 $\varepsilon = \alpha \hat{v}_0 r_0$ と表わされるU字管の一般分布を仮定する。この仮定に従えば、 ε は空間座標と無関係になり、これ迄の議論をそのまま適用出来る。層流解と異なり、ここは $\chi_0 = r_0 \sqrt{-\frac{i\omega}{\varepsilon}}$ の関係から、 $-\Omega^2 = \frac{\chi_0^6}{r_0^6} \alpha^2 \hat{R}_s^2$ 、 $\hat{R}_s = \frac{\hat{v}_0 r_0}{\nu}$ を得られ、ここに含まれるマッハ速度の振動 $\hat{v}_0$ も式(2.5)により次式で混成せられることになる。即ち

$$\hat{v}_0^2 = -\frac{r_0}{2} n^2 \{ (1 - \Omega^2) \}, \quad \hat{v}_0^2 = \frac{r_0}{2} n^2 \hat{\xi} \cdot \text{Amplitude} (1 - \Omega^2) \dots (3.4)$$

式(3.4)の第一式と、 $-\Omega^2 = \frac{\chi_0^6}{r_0^6} \alpha^2 \hat{R}_s^2$ より Ω を消去し、式(3.4)の第二式より $\hat{v}_0$ を消去すれば、層流時のパラメータである無次元管径 γ も同時に消去されて、次式を得られる。

$$F(\chi_0) = \chi_0^6 \frac{J_0(\chi_0)}{J_2(\chi_0)} = \frac{2}{\alpha^2 \frac{\gamma}{r_0} \cdot \text{Amplitude} (1 - \Omega^2)} \dots (3.5)$$

式(3.5)から明らかなように、 $\text{Imag}\{F(\chi_0)\} = 0$ となる根として χ_0 が定まり、式(3.1)より Ω が定まる。 χ_0, Ω には式(3.5)の実部より γ/r_0 が対応する。乱流時のU字管の自由振動を規定する無次元複素数速度 Ω は、層流時の無次元管径 $\gamma = r_0 \sqrt{\nu}$ に替り、無次元振動 γ/r_0 と対応関係を得るものと予想される。実測による半同期減衰率と無次元振動 γ/r_0 との関係を図-2に示すが、若干のバラツキを無視すると、無次元管径 γ が16から53の範囲内では無次元振動 γ/r_0 が30より大きくない限り、 γ と無次元管径 γ/r_0 はほぼ等しいと結論出来るであろう。すなわち $\varepsilon = \alpha \hat{v}_0 r_0$ により定義される比例定数 α の値を実測の減衰率から逆算すれば、 $\alpha = (2.5 + 0.05 \gamma/r_0) \times 10^{-2}$ の関係が得られ、この関係に基き式(3.5)から $30 \leq \gamma/r_0 \leq 150$ の範囲内の乱流時無次元複素数速度 Ω が計算される。

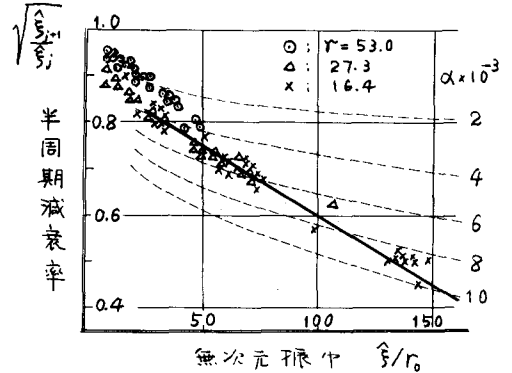


図2 無次元振動と半同期減衰率

4.1 連結管の自由振動への運動量方程式の適用

水面積 A_1, A_2 の二水槽を断面積 a 、長さ l のU字管で連結すると、動水勾配 ξ が生じ、二水槽内の液体に運動量方程式が適用される。

左の水槽内の液体の管軸方向への運動量を M_1 、右側の M_2 として管軸方向への運動量変化に着目すると、

$$\frac{\partial M_1}{\partial t} + \rho Q V = \rho g A_1 (H_1 - \xi_1) - p_1 A_1 \dots (4.1)$$

$$\frac{\partial M_2}{\partial t} + \rho Q (V_2 - V) = -\rho g A_2 (H_2 + \xi_2) + p_2 A_2 \dots (4.2)$$

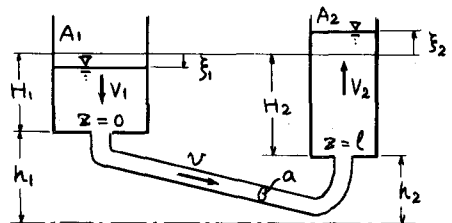


図3 連結管略図

そこで $M_1 = \rho (H_1 - \xi_1) A_1 V_1$ 、 $M_2 = \rho (H_2 + \xi_2) A_2 V_2$ 、 $A_1 \xi_1 = A_2 \xi_2 = a \xi$ 、 $V = i \omega \xi$ 。

式(4.1) (4.2) の両式より連結管両端の圧力差 $(p_1 - p_2)$ が計算されるから $H_1 + h_1 = H_2 + h_2 = h_0$ 及び $n^2 = \frac{g}{f} \left(\frac{a}{A_1} + \frac{a}{A_2} \right)$ と考慮すれば、動水勾配 $I = -\frac{2}{g} \left(\frac{p}{\rho g} + h \right)$ は次式で表わされる。

$$I = -\frac{n^2}{g} \left\{ 1 - \left(\frac{H_1}{f} \frac{a}{A_1} + \frac{H_2}{f} \frac{a}{A_2} \right) \Omega^2 \right\} + \frac{n^2 \Omega^2}{g f} \left\{ \frac{a}{A_1} - \frac{a}{A_2} \right\} \left\{ 1 - 3 \left(\frac{a}{A_1} + \frac{a}{A_2} \right) \right\} \dots (4.3)$$

式(4.3)の右で「+」項及び「-」項の大小関係に着目すれば、 $\Omega \approx 1$ であるから

$$\text{+項} / \text{-項} = \frac{f}{g} \left(\frac{a}{A_1} - \frac{a}{A_2} \right)$$

すなわち 1) $f/g \ll 1$ 2) $A_1, A_2 \gg a$ のいづれか成立するとき式(4.3)の右で「+」項は無視される。そのとき無次元パラメータ $\lambda = \left(\frac{H_1}{f} \frac{a}{A_1} + \frac{H_2}{f} \frac{a}{A_2} \right)$ と定義すれば、得られる動水勾配 I は式(4.4)で表わされ、U字管に於ける該式の I を式(4.4)で置き替えば、同様に1で無次元複素角速度 Ω が計算される。

$$I = -\frac{n^2}{g} \left\{ (1 - \lambda \Omega^2) \right\} \dots (4.4)$$

4.2 連結管の自由振動数に於ける複素角速度

連結管に於ける層流解に於いては式(4.4)と式(2.6)に代入し、 $V = \lambda \omega f$ の関係と、 $\alpha_0 = \gamma \sqrt{-\lambda \Omega}$ の関係より Ω を消去すれば次式が得られる。

$$\alpha_0 \left\{ \frac{J_0(\alpha_0)}{J_2(\alpha_0)} - \lambda \right\} = \gamma^2 \dots (4.5)$$

一方乱流解に於いてはU字管に於けると同様の変形により式(4.5)に替り次式が得られる。

$$\alpha_0 \left\{ \frac{J_0(\alpha_0)}{J_2(\alpha_0)} - \lambda \right\} = \frac{2}{\alpha^2 \sum_{f_0} \text{Amp} \{ 1 - (1 + \lambda) \Omega^2 \}} \dots (4.6)$$

5. 結 言

これ迄管内の自由振動現象を未定の複素角速度 ω を有する同期運動と仮定し、運動方程式を解き、連続条件等から ω を決定してきた。U字管に於いては乱流時に $\varepsilon = \alpha \hat{v}_0 \sigma$ の仮定により、実験上へ減衰特性をよく説明し得る理論的結論を導くことが出来た。しかしながら、より厳密な一次元の流及び時間的構造に於いては未解決であり、また連結管の問題に於いても運動量方程式に基づく動水勾配の妥当性及び断面急変部へ存在による乱流構造への影響等、多くの問題を残してより今後の課題としたい。尚、我々の小規模な実験資料からの結論に伴う scale effect の問題も、実際の調圧水槽の水理計算法等について電力中央研究所、千原信一、是枝 忍 の両氏より貴重な御指導と御助言を頂戴した。ここに厚く御礼申し上げる。

参 考 文 献

- (1) 安川、田川 “粘性振動・減衰特性に関する研究” 土木学会第26回年次学術講演会講演集
- (2) 梶浦欣一郎 “波に伴う水底摩擦床中層について” 東大地震研究所報告 Vol. 26, 1968
- (3) Hinze “Turbulence” McGraw Hill, 1959
- (4) Huon Li “Stability of Oscillatory Laminar Flow along a Wall” Beach E. Brd. Tech. Memo. No. 75, 1955
- (5) Brebner “The Effect of Roughness of the Mass Transport of Progressive Gravity Waves” Proc. 10th Conf. on Coastal Eng. 1966.