

日本大学理工学部 正員 近藤 勉

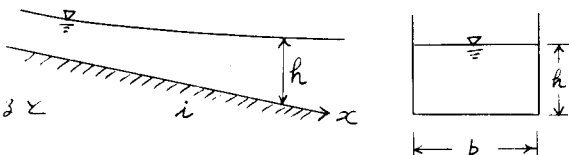
§.1. まえがき

一様な雨水路の不等流(水面形)計算法に関する研究は古くからなされてきた。¹⁾ 特に一様な矩形断面雨水路についての研究は多い。しかしそのほとんどが広矩形雨水路(いわゆる径深が水深に等しいとみなす)に関するものであった。また, Bakometeff, 物部, 最近では V.T. Chow 等により特定の断面水路でなく一般的な一様断面雨水路に適用し得る不等流関数の研究がなされているが, 一般的断面に対してのものである代り, 多少計算に煩雑さが感じられる。

また, 最近上水, 下水道用および工業用等の人工水路の必要性が高くなり, その中に幅の広くない矩形水路が多く見受けられる。以上のことより幅の広くない矩形水路の不等流計算法について若干の考察を試みる。

§.2. 順こう配の場合について

図のような矩形水路に対しての水深の流れ方向の変化率は Chézy の平均流速式を用いるとよく知られているように次のようになる。²⁾



$$\frac{dh}{dx} = (i - \frac{Q^2}{C^2 R A^3}) / (1 - \frac{Q^2 T}{g A^3}) \quad \text{----- (1)}$$

等流の流れが存在するものと仮定される場合の諸量には添字 0 をつけ, 限界水深時の諸量には添字 c をつけたもので (1) を変形し, $h_c/b = m_c$, $h_0/b = m_0$, $h/b = \eta$ とすると,

$$i d(\frac{x}{b}) = (\eta^3 - m_c^3) d\eta / \left\{ \eta^3 - (\frac{C_0}{C})^2 \frac{m_0^3}{1 + 2m_0} (2\eta + 1) \right\} \quad \text{----- (2)}$$

ここで, 先ず $C = C_0$ とすると, (2) は (3) のようになり被積分関数の分母の判別式 (D) により次の三つに分類され, それぞれ完全積分される。

$$i \int d(\frac{x}{b}) = \int \left[1 + \frac{\frac{m_0(2m_0+1)}{4m_0+3} - \frac{(2m_0+1)m_c^3}{m_0^2(4m_0+3)}}{\eta - m_0} + \frac{\left\{ -\frac{m_0(2m_0+1)}{4m_0+3} + \frac{(2m_0+1)m_c^3}{m_0^2(4m_0+3)} \right\} \eta + \frac{2m_0^2(4m_0^2+m_0-1)}{(2m_0+1)(4m_0+3)} + \frac{2(2m_0+1)m_c^3}{m_0(4m_0+3)}}{\eta^2 + m_0\eta + \frac{m_0^2}{2m_0+1}} \right] d\eta + \text{const} \quad \text{----- (3)}$$

A-I), $D > 0$, すなわち $m_0 = h_0/b > \frac{3}{2}$ の場合.

$$i \frac{x}{b} = \eta + \frac{m_0(2m_0+1)}{4m_0+3} \ln \frac{|\eta - m_0|}{\sqrt{\eta^2 + m_0\eta + \frac{m_0^2}{2m_0+1}}} + \frac{m_0(20m_0^2 + 8m_0 - 3)}{2(4m_0+3)\sqrt{(2m_0+1)(2m_0-3)}} \ln \left| \frac{2\eta + m_0 - m_0\sqrt{\frac{2m_0-3}{2m_0+1}}}{2\eta + m_0 + m_0\sqrt{\frac{2m_0-3}{2m_0+1}}} \right|$$

$$+ m_c^3 \left[-\frac{2m_0+1}{m_0^2(4m_0+3)} \ln \frac{|\eta - m_0|}{\sqrt{\eta^2 + m_0\eta + \frac{m_0^2}{2m_0+1}}} + \frac{3(2m_0+1)^{\frac{3}{2}}}{2m_0^2(4m_0+3)(2m_0-3)} \ln \left| \frac{2\eta + m_0 - m_0\sqrt{\frac{2m_0-3}{2m_0+1}}}{2\eta + m_0 + m_0\sqrt{\frac{2m_0-3}{2m_0+1}}} \right| \right]$$

$$+ \text{const} \text{ --- (4)}$$

(4) の右辺第1~3項までを $F_1(\eta, m_0)$, []内を $\bar{F}_1(\eta, m_0)$ とすると

$$i \frac{x}{b} = F_1(\eta, m_0) + m_0^3 \bar{F}_1(\eta, m_0) + \text{const} \text{ --- (5)}$$

A-II), $D=0$, あるいは $m_0 = h_0/b = \frac{3}{2}$ の場合

$$\begin{aligned} i \frac{x}{b} &= \eta + \left\{ \frac{m_0(2m_0+1)}{4m_0+3} - \frac{2m_0+1}{m_0^2(4m_0+3)} \cdot m_0^3 \right\} \ln |\eta - m_0| \\ &+ \left\{ -\frac{m_0(2m_0+1)}{2(4m_0+3)} + \frac{2m_0+1}{2m_0^2(4m_0+3)} m_0^3 \right\} \ln \left| \eta^2 + m_0\eta + \frac{m_0^2}{2m_0+1} \right| \\ &+ \left\{ \frac{m_0^2}{2} \cdot \frac{20m_0^2+8m_0-3}{(4m_0+3)(2m_0+1)} - \frac{(2m_0+1)(2m_0-3)}{2m_0(4m_0+3)} \cdot m_0^3 \right\} \frac{(-2)}{2\eta+m_0} + \text{const} \\ &= \eta + \frac{2}{3} \ln |\eta - \frac{3}{2}| - \frac{1}{3} \ln \left(\eta^2 + \frac{3}{2}\eta + \frac{9}{16} \right) - \frac{27}{8(2\eta + \frac{3}{2})} \\ &+ m_0^3 \left\{ -\frac{16}{81} \ln |\eta - \frac{3}{2}| + \frac{8}{81} \ln \left(\eta^2 + \frac{3}{2}\eta + \frac{9}{16} \right) + \frac{8}{27(2\eta + \frac{3}{2})} \right\} + \text{const} \\ &= F_2(\eta) + m_0^3 \bar{F}_2(\eta) + \text{const} \text{ --- (6)} \end{aligned}$$

A-III), $D < 0$, あるいは $m_0 = h_0/b < \frac{3}{2}$ の場合³⁾

$$\begin{aligned} i \frac{x}{b} &= \eta + \frac{m_0(2m_0+1)}{4m_0+3} \ln \sqrt{\frac{|\eta - m_0|}{\eta^2 + m_0\eta + \frac{m_0^2}{2m_0+1}}} + \frac{m_0(20m_0^2+8m_0-3)}{(4m_0+3)\sqrt{(2m_0+1)(3-2m_0)}} \arctan \frac{(2\eta+m_0)\sqrt{2m_0+1}}{m_0\sqrt{3-2m_0}} \\ &+ m_0^3 \left[-\frac{2m_0+1}{m_0^2(4m_0+3)} \ln \sqrt{\frac{|\eta - m_0|}{\eta^2 + m_0\eta + \frac{m_0^2}{2m_0+1}}} + \frac{3(2m_0+1)^{\frac{3}{2}}}{m_0^2(4m_0+3)\sqrt{3-2m_0}} \arctan \frac{(2\eta+m_0)\sqrt{2m_0+1}}{m_0\sqrt{3-2m_0}} \right] \\ &+ \text{const} \\ &= F_3(\eta, m_0) + m_0^3 \bar{F}_3(\eta, m_0) + \text{const} \text{ --- (7)} \end{aligned}$$

以上のように (5), (6), (7) は完全積分されたのであるが, $C=C_0$ の仮定の基であり矩形水路においては $\frac{dR}{d\eta} > 0$ であるので, 概略的に現在広く使われている Manning 式を用いると Chézy の係数との関係は $C = \frac{1}{n} R^{\frac{1}{6}}$ であるから, 不等流の水深 (η) が等流水深 (h_0) より大きな所では $C > C_0$, また h_0 より小さな所では $C < C_0$ であるので η が h_0 に近い所ではこの仮定はある程度許されると思われるが, η が h_0 から離れるに従い誤差が大きくなる。しかし M_1, M_2, S_1 および S_3 で示される水面形の場合 η と h_0 の差が大きい所では速度水頭の項の変動が大きくなり, $C=C_0$ の仮定による誤差はあまり大きくはならないようである。また, もっと精度を上げるために考えている区間 (あまり C が変化しないと思われる区間) では C は一定 (例えばその区間の平均水深に対するもの) と考えて (2) を積分

ある方法を考へてみる。そのために $(\frac{C_0}{C})^2 \frac{m_c^2}{1+2m_0} = \mu$ と置き、考へてゐる積分区間では一定とする
と、(2)の右辺分母の三次式の判別式(D)により次に示すように二重根に分類される。

B-I), $D < 0$ の場合, (三次式は一つの正の実根をもつ)

$$D = -32\mu^2(-\mu + \frac{27}{32}) < 0 \quad \therefore \mu < \frac{27}{32} = 0.844$$

この場合には(2)は次のように変形される。

$$id(\frac{x}{b}) = \left\{ 1 + \frac{A}{\eta - a - a'} + \frac{B\eta + C}{\eta^2 + (a+a')\eta + a^2 - aa' + a'^2} \right\} d\eta$$

ここで

$$a = \left(\frac{\mu}{2} + \sqrt{\frac{\mu^2}{4} - \frac{8}{27}\mu^3} \right)^{1/3}, \quad a' = \left(\frac{\mu}{2} - \sqrt{\frac{\mu^2}{4} - \frac{8}{27}\mu^3} \right)^{1/3}$$

$$A = \frac{\mu(2a+2a'+1)}{3(a^2+aa'+a'^2)} - \frac{m_c^3}{3(a^2+aa'+a'^2)}, \quad B = -\frac{\mu(2a+2a'+1)}{3(a^2+aa'+a'^2)} + \frac{m_c^3}{3(a^2+aa'+a'^2)}$$

$$C = \frac{2\mu(a^2-aa'+a'^2-a-a')}{3(a^2+aa'+a'^2)} + m_c^3 \frac{2(a+a')}{3(a^2+aa'+a'^2)}$$

そして次のように積分される。

$$\begin{aligned} i \frac{x}{b} = & \eta + \frac{\mu(2a+2a'+1)}{6(a^2+aa'+a'^2)} \ln \frac{(\eta - a - a')^2}{\eta^2 + (a+a')\eta + a^2 - aa' + a'^2} \\ & + \frac{3\mu(2a^2+2a'^2-a-a')}{\sqrt{\mu^2}\sqrt{27-32\mu}} \arctan \frac{2\eta+a+a'}{\sqrt{3}(a-a')} \\ & + m_c^3 \left[-\frac{\ln \left\{ \frac{(\eta - a - a')^2}{\eta^2 + (a+a')\eta + a^2 - aa' + a'^2} \right\}}{6(a^2+aa'+a'^2)} + \frac{3(a+a')}{\sqrt{\mu^2}\sqrt{27-32\mu}} \arctan \frac{2\eta+a+a'}{\sqrt{3}(a-a')} \right] \end{aligned}$$

$$+ const = F_4(\eta, \mu) + m_c^3 \overline{F}_4(\eta, \mu) + const \quad \text{----- (8)}$$

B-II), $D \geq 0$ の場合, すなわち $\mu \geq \frac{27}{32} = 0.844$ (三次式は一つの正実根と二つの虚実根をもつ)

$$\eta_1 = \frac{4}{3}\mu \cos \frac{\theta}{3}, \quad \eta_2 = -\frac{2}{3}\mu (\cos \frac{\theta}{3} + \sqrt{3} \sin \frac{\theta}{3}), \quad \eta_3 = -\frac{2}{3}\mu (\cos \frac{\theta}{3} - \sqrt{3} \sin \frac{\theta}{3})$$

$$\text{ここで } \theta = \arccos \sqrt{\frac{27}{32\mu}} \quad \text{または, } \theta = \arcsin \sqrt{1 - \frac{27}{32\mu}}$$

これを用いると(2)は,

$$id(\frac{x}{b}) = \left\{ 1 + \frac{E}{\eta - \frac{4}{3}\mu \cos \frac{\theta}{3}} + \frac{G}{\eta + \frac{2}{3}\mu (\cos \frac{\theta}{3} + \sqrt{3} \sin \frac{\theta}{3})} + \frac{H}{\eta + \frac{2}{3}\mu (\cos \frac{\theta}{3} - \sqrt{3} \sin \frac{\theta}{3})} \right\} d\eta$$

ここで, E, G, H は η に無関係で, μ だけに依るものである。

これは積分され次のようになる。

$$\begin{aligned}
i \frac{x}{b} = & \eta + \frac{3}{4\mu} \cdot \frac{1 + \frac{8}{3}\mu \cos \frac{\theta}{3}}{3\sin^2 \frac{\theta}{3} - \sin^2 \frac{\theta}{3}} \ln \left| \eta - \frac{4}{3}\mu \cos \frac{\theta}{3} \right| \\
& + \frac{3(-20\mu \cos^2 \frac{\theta}{3} + 3\cos \frac{\theta}{3} + \frac{8\sqrt{3}}{3}\mu \cos \frac{\theta}{3} \sin \frac{\theta}{3} - \sqrt{3} \sin \frac{\theta}{3} + 4\mu \sin^2 \frac{\theta}{3})}{8\sqrt{3}\mu \sin \frac{\theta}{3} \cdot (3\cos^2 \frac{\theta}{3} - \sin^2 \frac{\theta}{3})} \ln \left\{ \eta + \frac{2}{3}\mu (\cos \frac{\theta}{3} + \sqrt{3} \sin \frac{\theta}{3}) \right\} \\
& - \frac{3(-20\mu \cos^2 \frac{\theta}{3} + 3\cos \frac{\theta}{3} + \frac{8\sqrt{3}}{3}\mu \cos \frac{\theta}{3} \sin \frac{\theta}{3} + \sqrt{3} \sin \frac{\theta}{3} + 4\mu \sin^2 \frac{\theta}{3})}{8\sqrt{3}\mu \sin \frac{\theta}{3} \cdot (3\cos^2 \frac{\theta}{3} - \sin^2 \frac{\theta}{3})} \ln \left\{ \eta + \frac{2}{3}\mu (\cos \frac{\theta}{3} - \sqrt{3} \sin \frac{\theta}{3}) \right\} \\
& + m_c^3 \left[\frac{-3}{4\mu^2 (3\cos^2 \frac{\theta}{3} - \sin^2 \frac{\theta}{3})} \cdot \ln \left| \eta - \frac{4}{3}\mu \cos \frac{\theta}{3} \right| \right. \\
& - \frac{3(3\cos \frac{\theta}{3} - \sqrt{3} \sin \frac{\theta}{3})}{8\sqrt{3}\mu^2 \sin \frac{\theta}{3} \cdot (3\cos^2 \frac{\theta}{3} - \sin^2 \frac{\theta}{3})} \ln \left\{ \eta + \frac{2}{3}\mu (\cos \frac{\theta}{3} + \sqrt{3} \sin \frac{\theta}{3}) \right\} \\
& \left. + \frac{3(3\cos \frac{\theta}{3} + \sqrt{3} \sin \frac{\theta}{3})}{8\sqrt{3}\mu^2 \sin \frac{\theta}{3} \cdot (3\cos^2 \frac{\theta}{3} - \sin^2 \frac{\theta}{3})} \ln \left\{ \eta + \frac{2}{3}\mu (\cos \frac{\theta}{3} - \sqrt{3} \sin \frac{\theta}{3}) \right\} \right] + \text{const} \\
= & F_5(\eta, \mu) + m_c^3 \bar{F}_5(\eta, \mu) + \text{const} \text{ --- (9)}
\end{aligned}$$

5.2. 水平水路 ($i=0$) の場合.

(1) は次のようになり、考えている区間で Chézy の係数 C を一定とすると,

$$d\left(\frac{x}{b}\right) = -\frac{\alpha C^2}{8 m_c^3} \left\{ \frac{1}{2} \eta^2 - \frac{1}{4} \eta + \frac{1}{8} - \frac{\frac{1}{8} + m_c^3}{2\eta + 1} \right\} d\eta$$

$$\therefore \frac{x}{b} = \frac{\alpha C^2}{2g} \ln(2\eta + 1) - \frac{\alpha C^2}{8 m_c^3} \left\{ \frac{1}{6} \eta^3 - \frac{1}{8} \eta^2 + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} \ln(2\eta + 1) \right\} + \text{const}$$

5.3. 逆こう曲記の場合.

i 自体は正の値をもつようにせると, (2) は

$$-i d\left(\frac{x}{b}\right) = \frac{\eta^3 - m_c^3}{\eta^3 + \beta(2\eta + 1)} \cdot d\eta, \quad \beta = \frac{g m_c^3}{\alpha C^2 i}$$

となり, 上式右辺は $B-I$ の (8) で $\mu \rightarrow -\beta$ としたものに等しいから.

$$-i \frac{x}{b} = F_4(\eta, -\beta) + m_c^3 \bar{F}_4(\eta, -\beta) + \text{const} \text{ --- (10)}$$

5.4. あとがき.

式自体は少々複雑にはなるが, $F_1, \bar{F}_1, \dots, F_5, \bar{F}_5$ に対してあらかじめ図, 表を作成しておきまた水面追跡をする区間も適当に分割することにより割合簡単に水面形が求められるであろう。

文献. 1) VEN TE Chow: Open-Channel Hydraulics, 2) 例とは 栗津・木村: 演習水理学

3) 本岡・安芸: 物部水理学