

北大衛生工学科 正夏 高畑征三郎

(1) はじめに

最近の電子計算機の発達により、洪水追跡の分野にも数多くの計算方法が提案されてきた。一般に、河川や水路においては、その縦断、横断形状、粗度などは複雑に変化する。有限差分法による洪水追跡は、これらの変化を考慮に入れて計算できるという点で注目すべき方法である。Amein¹⁾は、Fig. 1 に示すような Implicit 差分法を提案した。Implicit 差分法とは、ある既知の time line 上の点から、次の未知の time line 上の点の値を求める際、運動方程式、連続方程式の多元連立方程式を同時に解いて解を求める方法で、explicit 差分法に比べ、1 step の時間間隔を大きく取ることができ、計算時間を大巾に短縮することができ、筆者は、この方法を水路における洪水追跡に適用するにあたって、二、三の問題点に遭遇した。以下、implicit 法の適用の方法を述べ、上流境界条件、下流境界条件、初期条件の設定の方法および計算の精度や解の安定性、収束性に与える影響について、二、三の初歩的な考察を述べる。

(2) 流れの方程式

この洪水追跡法で用いる方程式は良く知られた次の式である。

$$\text{連続式} \quad \frac{\partial A}{\partial t} + v \frac{\partial A}{\partial x} + A \frac{\partial v}{\partial x} - q = 0 \quad (1)$$

$$\text{運動式} \quad g \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + g S_f - g S_0 + \frac{g v}{A} = 0 \quad (2)$$

ここで、 A : 流水断面積(m^2)、 v : 流速(m/sec)、 y : 水深(m)、 g : 重力の加速度($=9.8 m/sec^2$)、 S_0 : 水路勾配、 S_f : 水さ勾配、Manning 式 $S_f = n^2 v^2 / R^{4/3}$ 、 q : 横一様流入量($m^3/sec/m$)、 x : 距離(m)、 t : 時間(sec)

沖積層の地に自然にできた河道の断面は放物線に近いものが多い。そこで、ここでは、次のような一様な放物線断面を採用した。 B : 流水表面巾、 P_c : 断面形状係数

$$P_c \cdot y = B^2 \quad (3)$$

また、 y 、 B 、 A 、 R (径深) の間には次の関係がある。

$$A = \frac{2}{3} B y = \frac{2}{3} \sqrt{P_c} y^{3/2} = \frac{2}{3} \frac{B^3}{P_c} \quad (4)$$

$$R = \frac{2y}{3[1 + \frac{2}{3}(\frac{2y}{B})^2]} = \frac{PA^{2/3}}{1 + \frac{4P}{R} A^{2/3}} \quad \therefore P = \frac{2}{3} \left(\frac{3}{2\sqrt{P_c}} \right)^{2/3} \quad (5)$$

また、方程式(2)中の $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{dy}{dA} \frac{\partial A}{\partial x} = P A^{-1/3} \frac{\partial A}{\partial x}$ であるので、方程式(2)は次のように変形される。

$$g P A^{-1/3} \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + g S_f - g S_0 + \frac{g v}{A} = 0 \quad (6)$$

方程式(1)と(6)とが基本式となる。

(3) Implicit 差分表現

基本となる(1)式と(6)式とを微分化するが、 $Amein^{(1)}$ で用いた次のような表現を採用した。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial t} &= \frac{(M_i^{j+1} + M_{i+1}^{j+1}) - (M_i^j + M_{i+1}^j)}{2 \Delta t} & \frac{\partial M}{\partial x} &= \frac{(M_{i+1}^{j+1} + M_{i+1}^j) - (M_i^{j+1} + M_i^j)}{2 \Delta x} \\ M &= \frac{M_{i+1}^{j+1} + M_{i+1}^j + M_i^{j+1} + M_i^j}{4} \end{aligned} \right\} (7)$$

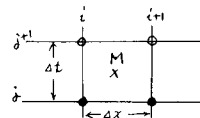


圖-1. Implicit 差分表現

ここで、 j は既知値、 $j+1$ は未知値を示す。また、水路を N 等分すると、 $i = 1 \sim N$

これらの表現を方程式(1), (6)に適用し、まとめると、次の2つの方程式が得られる。

連續方程式

$$F_i(A_{in}, A_i, v_{in}, v_i) = (A_{in} + A_i) + a_i + \frac{\Delta t}{4\Delta\lambda} (A_{in}(2v_{in} + b_i) + A_i(-2v_i + c_i) + d_i v_i + f_i) - 2\Delta t g_i = 0 \quad (8)$$

運動方程式

$$G_i(A_{in}, A_i, v_{in}, v_i) = \frac{p}{4} \left(\frac{1}{A_{in}^{3/2}} + \frac{1}{A_i^{3/2}} + \mathcal{L}_2 \right) (A_{in} - A_i + Q_2) + \frac{\Delta t}{g} \frac{d}{dx} (v_{in} + v_i + C_2) + \frac{1}{4g} (v_{in}^2 - v_i^2 + \mathcal{L}_1 v_{in} + C_1 v_i + f_2) + \frac{\Delta x}{2} (S_{f_{in}} + S_{f_i} + d_2) + \frac{\Delta x}{2g} g \left(\frac{v_{in}}{A_{in}} + \frac{v_i}{A_i} + e_2 \right) = 0 \quad (9)$$

$$c = c^0, \quad a_i = -A_{\text{Gr}}^i - A_i^0, \quad b_i = 2v_{\text{Gr}}^i, \quad c_i = -2v_i^0, \quad d_i = 2A_{\text{Gr}}^i, \quad e_i = -2A_i^0, \quad f_i = 2A_{\text{Gr}}^i v_{\text{Gr}}^i - 2A_i^0 v_i^0$$

$$a_2 = A_{i+1}^j - A_i^j, \quad b_2 = \frac{1}{A_{i+1}^j} \frac{1}{v_3} + \frac{1}{A_i^j} \frac{1}{v_3}, \quad c_2 = -v_{i+1}^j - v_i^j, \quad d_2 = \delta_{fi}^j + \delta_{fi}^j - 4 \delta_0, \quad e_2 = \frac{v_{i+1}^j}{A_{i+1}^j} + \frac{v_i^j}{A_i^j}$$

$f_2 = (v_{i+1}^j)^2 - (v_i^j)^2$, $j \in \mathbb{N}$. 方程式(8), (9)は未知数と係数に示標 $(j+1)$ を取り除いて書いている。

(4) 境界条件

水路を N 等分した場合、(8), (9) 式は合計して $2N$ 個得られる。一方、未知数は $A_i, V_i (i=1 \sim N+1)$

で、合計し $2N+2$ 個存在し、連立方程式で解を求めるためには、上流、下流境界条件が各1個必要である。

★上流境界条件 上流端における流量が既知の時は次の式で与えられている。¹⁾

$$A_1 \cdot v_1 = Q(t) \quad Q(t): \text{上流端流量} \quad (10)$$

また、上流に同じられているような水路では、次のような式が与えられる。

$$A_1 \cdot v_1 = Q_8 \quad Q_8: \text{一定值, } \text{baseline: 相当可也.} \quad (11)$$

もしも

$$A_1 = C \quad C: \text{一定值} \quad (12)$$

★下流域境界条件 下流端において、水位、流量曲線が得られるような場合、次式が与えられる。¹⁾

$$A_{N+1}: v_{N+1} = f(y_{N+1}) \quad (13)$$

下流端において(13)式のような情報が入りできない場合、例えば、支川合流直前の洪水追跡の場合などは、断面積と流速の間の何らかの関係を与える式が必要となる。例えば Manning タイプの式を採用すると、

$$V_{N+1} = KR^{2/3} = K \left(\frac{P A_{N+1}^{2/3}}{1 + \frac{4P}{P_c} A_{N+1}^{2/3}} \right)^{2/3} \quad (14)$$

今、上流境界条件に(11)式、下流境界条件に(14)式を用いると、次の2つの式が得られる。

$$F_0(A_i, v_i) = A_i \cdot v_i - Q_i \quad (11)'$$

(5) 連立方程式の解法

方程式(11'), (8), (9), (14')を連立して解くと、求める解が得られる。これらの連立方程式は非線型方程式であるがC. Newton のくりかえし法により線型化しなければならぬ。Newton のくりかえし法は、まず、前述の $(2N+2)$ 元非線型方程式に trial 値を代入し、その時得られる残差を0と可とする方向で

繰繰近似とし、残差0となるまで、この操作をくりかえすのである。前サイクルの既知値を用いて、前+1サイクルの未知値を表現すると、その線型方程式は次のようである。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial F_0}{\partial A_1} A_1^{k+1} + \frac{\partial F_0}{\partial v_1} v_1^{k+1} &= -Re_1 + \frac{\partial F_0}{\partial A_1} A_1^k + \frac{\partial F_0}{\partial v_1} v_1^k \\ \frac{\partial F_1}{\partial A_1} A_1^{k+1} + \frac{\partial F_1}{\partial v_1} v_1^{k+1} + \frac{\partial F_1}{\partial A_2} A_2^{k+1} + \frac{\partial F_1}{\partial v_2} v_2^{k+1} &= -Re_2 + \frac{\partial F_1}{\partial A_1} A_1^k + \frac{\partial F_1}{\partial v_1} v_1^k + \frac{\partial F_1}{\partial A_2} A_2^k + \frac{\partial F_1}{\partial v_2} v_2^k \\ \frac{\partial G_1}{\partial A_1} A_1^{k+1} + \frac{\partial G_1}{\partial v_1} v_1^{k+1} + \frac{\partial G_1}{\partial A_2} A_2^{k+1} + \frac{\partial G_1}{\partial v_2} v_2^{k+1} &= -Re_3 + \frac{\partial G_1}{\partial A_1} A_1^k + \frac{\partial G_1}{\partial v_1} v_1^k + \frac{\partial G_1}{\partial A_2} A_2^k + \frac{\partial G_1}{\partial v_2} v_2^k \\ &\vdots \\ \frac{\partial F_N}{\partial A_N} A_N^{k+1} + \frac{\partial F_N}{\partial v_N} v_N^{k+1} + \frac{\partial F_N}{\partial A_{N+1}} A_{N+1}^{k+1} + \frac{\partial F_N}{\partial v_{N+1}} v_{N+1}^{k+1} &= -Re_N + \frac{\partial F_N}{\partial A_N} A_N^k + \frac{\partial F_N}{\partial v_N} v_N^k + \frac{\partial F_N}{\partial A_{N+1}} A_{N+1}^k + \frac{\partial F_N}{\partial v_{N+1}} v_{N+1}^k \\ \frac{\partial G_N}{\partial A_N} A_N^{k+1} + \frac{\partial G_N}{\partial v_N} v_N^{k+1} + \frac{\partial G_N}{\partial A_{N+1}} A_{N+1}^{k+1} + \frac{\partial G_N}{\partial v_{N+1}} v_{N+1}^{k+1} &= -Re_{N+1} + \frac{\partial G_N}{\partial A_N} A_N^k + \frac{\partial G_N}{\partial v_N} v_N^k + \frac{\partial G_N}{\partial A_{N+1}} A_{N+1}^k + \frac{\partial G_N}{\partial v_{N+1}} v_{N+1}^k \\ \frac{\partial G_{N+1}}{\partial A_{N+1}} A_{N+1}^{k+1} + \frac{\partial G_{N+1}}{\partial v_{N+1}} v_{N+1}^{k+1} &= -Re_{N+2} + \frac{\partial G_{N+1}}{\partial A_{N+1}} A_{N+1}^k + \frac{\partial G_{N+1}}{\partial v_{N+1}} v_{N+1}^k \end{aligned} \right\} (15)$$

ここで偏導関数は前 cycle の時の値を用い、次のように与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial F_0}{\partial A_1} &= v_1 & \frac{\partial F_0}{\partial v_1} &= A_1 \\ \frac{\partial F_i}{\partial A_i} &= 1 - \frac{\Delta t}{4\Delta x} (2v_i - C_i) \\ \frac{\partial F_i}{\partial v_i} &= \frac{\Delta t}{4\Delta x} (-2A_i + e_i) \\ \frac{\partial F_i}{\partial A_{i+1}} &= 1 + \frac{\Delta t}{4\Delta x} (2v_{i+1} + b_i) \\ \frac{\partial F_i}{\partial v_{i+1}} &= \frac{\Delta t}{4\Delta x} (2A_{i+1} + d_i) \end{aligned} \right\} (16)$$

ここで Re_i : 残差

$$\begin{aligned} \frac{\partial G_i}{\partial A_i} &= \frac{P}{4} \left\{ -A_i^{-1/3} - \frac{2}{3} A_i^{-1/3} - \frac{1}{3} (A_{i+1} + a_2) - b_2 \right\} - \frac{4}{9} \Delta x \frac{v_i^2 v_{i+1}^2 A_i R_{i+1}}{P} - \frac{\Delta x}{2g} g \frac{v_i}{A_i^2} \\ \frac{\partial G_i}{\partial v_i} &= \frac{\Delta x}{g \Delta t} + \frac{1}{4g} (-2v_i + C_i) + \Delta x \frac{\partial f_i}{v_i} + \frac{\Delta x}{2g} \frac{g}{A_i} \\ \frac{\partial G_i}{\partial A_{i+1}} &= \frac{P}{4} \left\{ -A_i^{-1/3} + \frac{2}{3} A_i^{-1/3} - \frac{1}{3} (-A_i + a_2) + b_2 \right\} - \frac{4}{9} \Delta x \frac{v_i^2 v_{i+1}^2 A_{i+1} R_{i+1}}{P} - \frac{\Delta x}{2g} g \frac{v_{i+1}}{A_{i+1}^2} \\ \frac{\partial G_i}{\partial v_{i+1}} &= \frac{\Delta x}{g \Delta t} + \frac{1}{4g} (2v_{i+1} + b_i) + \Delta x \frac{\partial f_{i+1}}{v_{i+1}} + \frac{\Delta x}{2g} \frac{g}{A_{i+1}} \end{aligned}$$

(6) 初期条件

初期条件は等流を仮定した。すなわち、水路のすべての点で次式が成立するとする。

$$v_i = \frac{S_0}{n} \left(\frac{P A_i^{2/3}}{1 + (4P/P_c) A_i^{1/3}} \right)^{2/3} \quad (17)$$

(7) 二、三の考察 Implicit差分法は $(2N+2)$ 元方程式の連立解を求める方法であるから、本来解は安定で収束性のあるものである。ところが、条件の与え方、計算精度の決め方によっては、解が大きく振動したり、また、時には発散して解が求められなくなることもある。このような解の収束性や安定性は未だ数学的に解明されておらず、現段階においては経験的に良い方法を探究するしかない。

(7-1) 計算の精度 求められた解が振動する原因の多くは、計算機内の丸め誤差の積み重ねの結果である可能性が高い。そこで単精度計算を倍精度計算に変えると、解の振動はほとんどなくなる。図-2は支川が合流する場合(図4の細排水域)のその一例を示す。単精度計算の場合、130分以後は30回のくりかえし計算を行っても解が求められなかったが、倍精度計算をすると、解が非常に安定しており、3~4回のくりかえし計算で次の時間stepの解が求められる。

(7-2) 初期条件 初期条件の値は4 step(=270分)以後の解の値にはほとんど影響をおよぼさない。適当な等流水深を仮定すればよいが、しかし、地表流を追跡する際のような、初期水深を0からそれに近い値を仮定すると、計算 overflow がおこることもある。

(7-3) 上流境界条件 図-4のオ工排水域の水路における洪水追跡を行なう場合のように、上流が閉じられている場合について、(11)式を用いて Q_0 値を変化させた式、ほとんど、その影響はみら

れなかった。この Q_b 値は baseflow に相当する値で、適当に設定すればよい。また (11) 式と (12) 式とは、どちらの式を用いても、ほとんど同一の結果が得られる。

(7-4) 下流境界条件 図-4 の等面積流域の水路における洪水追跡を行なう場合、下流境界条件として (14) 式を採用し、その K 値について検討したのが図-5 である。 K 値は等流状態の値 $\frac{S_0}{n}$ (ここで n : Manning 粗度係数) の時の解が最も安定しており、非常になめらかな解が得られる。図-5 は K 値として等流状態と異なった値を採用した場合の解の不安定化を示すものである。面白いことに、流速、断面積が非常に不安定になっても、流量は、どのような K 値を用いても、ほとんど変化しない。さらに検討を要すべし、 K 値の変化に対し、このように流速、断面積の解が不安定になるということは、(13) 式のような実測の水位-流量曲線を用いた場合にも、流速、断面積の解が不安定になるのではないかとということも示唆される。以上、簡単に考察を述べたが、implicit 差分法において、計算の精度、および設定する境界条件の意義について、さらに検討していきたい。詳細は講演稿に述べる予定である。

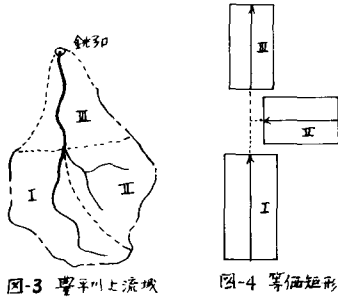


図-3 等面積流域

図-4 等面積矩形

流域 No.	面積 km^2	片側斜面流下中 km	流路長 km	斜面平均勾配	流路平均勾配
I	65.4	2.8	11.7	0.202	0.021
II	41.3	2.6	7.9	0.280	0.041
III	41.9	2.3	9.2	0.032	0.017

表-1 等面積矩形流域の数値

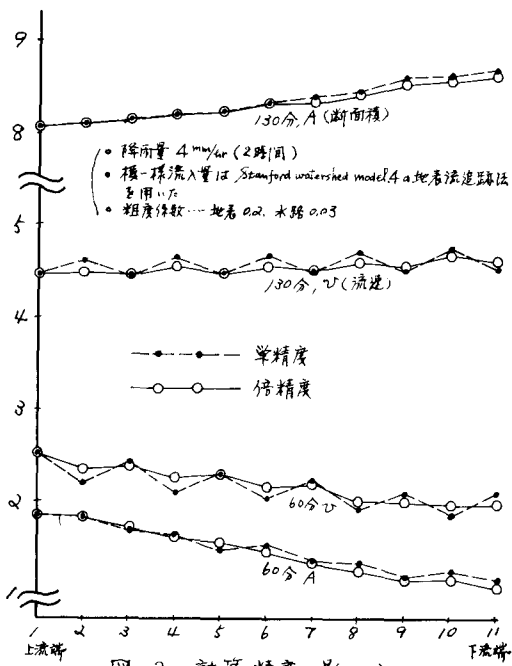


図-2 計算精度の影響

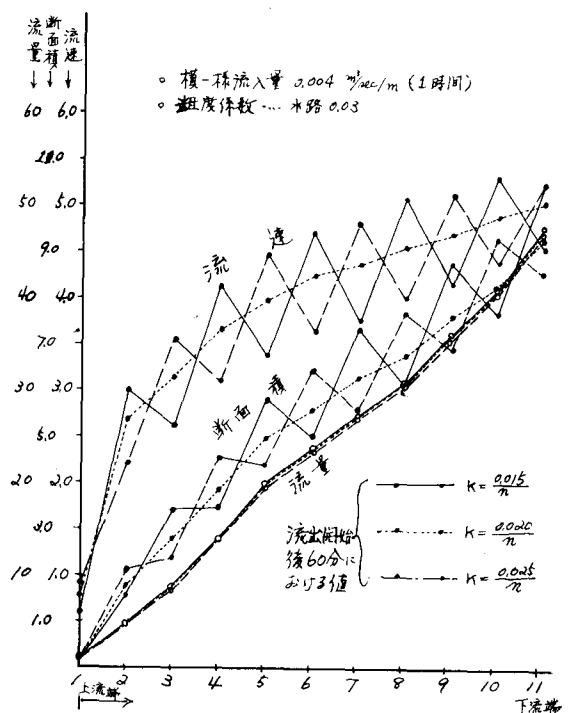


図-5 下流境界条件の影響

参考文献 1) Armin; Water Resources Research, Vol. 4, No. 4, p19~706; J.A.S.C.E. 1970. Dec. 1972, p2481~2500