

大阪大学工学部 正員 村岡浩爾
大阪大学大学院 学生員 〇中辻啓二

§-1 まえがき

感潮河川での非定常汚濁予測計算に限らず境界条件が複雑で偏微分方程式を直接解き得ない場合にしばしば近似解法として差分方程式が用いられるが、適切な応用のためにはその収束性・安定性の吟味・誤差の評価が極めて重要であることは論を待たない。通常の水利計算の差分解では解の発散を制御する安定条件を満足すれば信頼し得る解が得られる場合が多く、有限次差分の打ち切り誤差は無視されるのが普通である。しかし、対象とする未知水理量が水位や流速のように空間的变化が小さい時には問題と作らねば、濃度のようにその勾配が大きい場合には無視できなく解は発散しなくとも異常な誤差を含みその評価は重要となる。著者の一人は先の関西支部年講で流れの中での拡散現象を一次の正確度で差分することによる誤差を定量的に把握し、 Δx と Δt とを合理的に選ぶことにより誤差を最小にし得ることを示したが、本研究では差分化に伴う誤差の理論的評価・検討を試みる。

§-2 疑似分散とは

河川の流れによって移送されつつ拡散・分散しその過程で生物学的ならびに化学的作用および吸着・沈殿により増減する物質の挙動は保存則により表わされ、差分誤差評価のために一様流、一様断面、分散係数 D 一定の理想的な場合を考えると一次元的には次の移流分散式で表わされる。

$$\frac{\partial C}{\partial t} + U \frac{\partial C}{\partial x} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \quad (1)$$

一般には、一次の正確度で時間項に関しては前進差分、移流項には後退差分、拡散項には中心差分を用いて差分表示されるが、数学的に見ると右辺はTaylor級数展開の3次以上の項を省略して差分化したのに対し、左辺は1次項のみを考慮した結果切断誤差として二次の散分項が残る。すなわち元の微分方程式を正確に差分近似しない

故生じる誤差が拡散を促進させる効果を生じ、時間と共に差分解分布形状は歪み、拡散あるいは分散することになる。これを疑似分散と定義する。今定量的に把握するために拡散項を省略した移流方程式

$$\frac{\partial C}{\partial t} + U \frac{\partial C}{\partial x} = 0 \quad (2)$$

を考える。Taylorのモメント変化法を用いて分散係数 D_p を表わすと

$$D_p = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\int_{-\infty}^{\infty} x^2 C dx}{\int_{-\infty}^{\infty} C dx} \right) \quad (3)$$

となり、初期条件として矩形濃度分布を与えて各差分法に対する係数 D_p を $\Delta x = 300^m$, $\Delta t = 600^{\text{sec}}$ 、感潮河川においては流速 U は零から有限値へ変化する故 U を変化させて求めたのが図-1である。

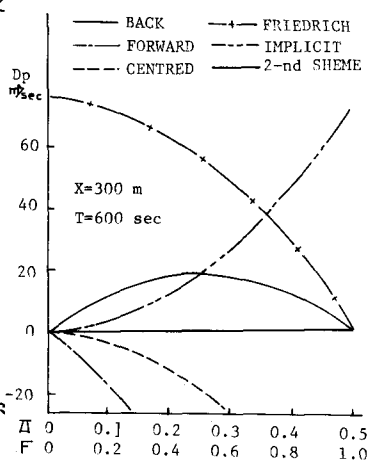


図-1 疑似分散係数

3次以下の打ち切り誤差を無視するならば疑似分散係数 D_p は微分式と差分式との誤差として表記される事で、 D_p が負となる中心・前進差分は負の伝導度を有する拡散方程式を差分近似していることと

なり時間と共に解は野数的に増大する不安定な差分法となる。それ故 \$D_p\$ が正でしかも最小にし得るよう \$\Delta x, \Delta t\$ を流速 \$U\$ に対して合理的に選ぶか、\$+D_p \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}\$ なる二次分散項を式(2)右辺に加えることにより \$F = U \Delta t / \Delta x\$ の値にかかわらず \$D_p\$ が零となる二次項まで考慮した式が考えられるが、それでも次項で示すような分散が存在する。次に Implicit な方法を用いても疑似分散は存在する。

§-3 移流数値モデルによる差分誤差

移流方程式(2)が周期的な解を持つものと仮定し、Fourier 解析して解析解と差分解との誤差を比較検討する。今未知関数 \$C(x, t + \Delta t)\$ を時間 \$t\$ における各格子点上の各値の一次結合で与える差分法を考えるならば、その一般形は、

$$C(x, t + \Delta t) = Q(T, \Delta x) \cdot C(x, t) \tag{4}$$

$$\begin{aligned} \text{ここに } Q(T, \Delta x) &= \sum_{|k| \leq g} Q_\alpha(\Delta x) \cdot T^\alpha \\ T^\alpha &= T_1^\alpha \cdot T_2^\alpha \cdots T_n^\alpha, \quad T_i \varphi(x) = \varphi(x_1 \cdots x_i + \Delta x, \cdots x_n) \end{aligned}$$

で表わされる。差分演算子の Fourier 変換にあたる増巾因子 \$Q\$ を与えて、\$C(x, t)\$ に対する Fourier 変換 (\$x\$ に関して)

$$C(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} \hat{C}(k, t) dk \tag{5}$$

を式(5)に行わうと次のようになる。

$$C(k, t + \Delta t) = \hat{Q}(\Delta x, k \Delta x) \cdot \hat{C}(k, t) \tag{6}$$

$$\text{ここに } \hat{Q}(\Delta x, k \Delta x) = \sum_{|k| \leq g} Q_\alpha(\Delta x) \exp[i\alpha k \Delta x]$$

式(4)を逐次近似することにより \$C(x, t + \Delta t)\$ を初期値問題として解くが、その計算回数 \$n\$ の増大、すなわち \$\Delta x\$ の零への漸近にかかわらず \$Q\$ が有界にとどまる時、その差分法は安定であるといえる。式(3)の解析解は流速 \$U\$ により唯移流するだけでその分布形は変わらない故、解析解の増巾因子 \$Q\$ は \$\exp[-i U \Delta t]\$ であり、\$n\$ 時間 step 後の差分による誤差 \$\Delta n\$ は各波数に対して求められて、

$$\Delta n = 1.0 - \sum_{|k| \leq g} Q_\alpha(\Delta x) \exp[i n (\alpha k \Delta x + U \Delta t)] \tag{7}$$

となり、差分法に伴う誤差は次のように分類できる。

(i) 数値減衰 —— 増巾因子が 1.0 より小さい故生じる減衰・逸散

(ii) 数値分散 —— 速度位相誤差による分散

表-1 は各差分法に対してこれらの値を求めたもので \$\Delta x\$ 進む間での誤差を示す。一次正確度の差分では \$F\$ が 1.0 にあるいは \$k \Delta x (= 2\pi \Delta x / \lambda)\$ が 0.0 に近づくにつれ増巾因子は 1.0 となり安定条件内で近似度は増進されるが、波長がその限界値 \$(2 \Delta x)\$ に近づくとき非常に減衰が生じる。例えば \$F k \Delta x = 180^\circ\$ の場合、計算回数 20 回の反復による減衰

ARGUMENT 2 \$\pi\$ L / \$\Delta\$X	AMPLIFICATION FACTOR (F=0.2)					(F=0.6)
	1 st	2 nd		3 rd		1 st
	BACK	BACK	CENTRED	C-N	CENTRED	BACK
0°	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
18°	0.9613	0.9986	0.9998	1.0000	1.0000	0.9804
54°	0.7021	0.9050	0.9838	1.0000	1.0038	0.8322
90°	0.3813	0.5196	0.9068	1.0000	0.9856	0.5799
126°	0.1697	0.1138	0.7753	1.0000	0.8565	0.3022
180°	0.0778	0.0017	0.6591	1.0000	0.6591	0.0684
PHASE-SHIFT (F=0.2)						(F=0.6)
	0°	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	18°	0.0079	-0.0231	0.0157	0.0167	-0.0013
	54°	0.0740	-0.1740	0.1350	0.1435	0.0140
	90°	0.2202	-0.3460	0.3462	0.3655	0.1293
	126°	0.4707	-0.3718	0.6110	0.6329	0.4049
	180°	1.0000	0.9997	1.0000	1.0000	0.9999

表-1 増巾因子と位相誤差

の最大は 1/5 程度となる。二次差分でも \$F\$ の値如何により同様の傾向が見られるが 986/1000 程度でその減衰度は一次に比較して充分小さく、正確度を必要とする計算には一次差分は不適当といえる。

また有限差分において伝達される限界波長は格点間隔 Δx の2倍であり、これ以下の波長成分は考慮されなく初期条件に対応する適切な空間格点間隔の選定が必要となるが、波長が $2\Delta x$ よりも大きい場合においても流速度により移流される成分は低い波数成分に限られ、限界値近くでは全く移流せず位相誤差として分散現象を呈することになる。特に数値減衰は計算step数の累乗で効果を及ぼすのに対し数値分散はその積で表わされより支配的な要素となる。すなわち疑似分散係数が零である二次差分でもなお分散誤差は存在することとなり、これを排除するにはより高次の正確さを有する差分近似を考える必要がある。

初期条件として矩形分布を与えて各差分法により分布形状を計算したのが図-2である。唯移流するだけで分布形状の変化はない筈であるが一次後退差分では数値分散は非常に大きく12時間後には $F=0.2$ では25%に、0.6では16.5%に最大濃度は減少し、計算step毎に夫々分散係数 $2.6 \frac{m^2}{sec}$ で振がる。二次差分では減衰を30%前後に抑さえられるが人為的分散項により負の濃度が初期計算stepで発生するのは注意すべきであろう。これは波数別速度、位相誤差に原因するものと考えられる。また一次中心差分では解は発散しImplicitな方法では振動する故併せて載せていない。

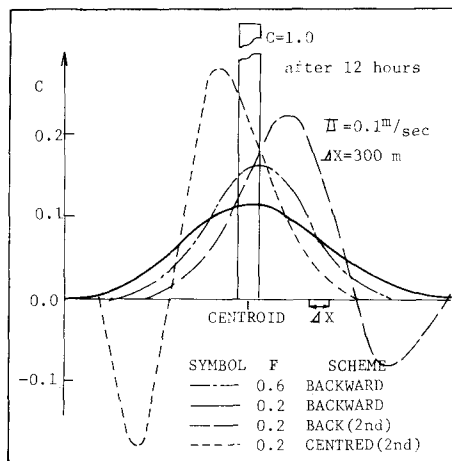


図-2 濃度分布 (矩形初期分布)

濃度分布の時間に対する変化をみると、早期段階では非常な減衰が生じるが、ある分布形状以後の減衰率は急激に減少し一定値に近づく。これは濃度分布形状にその減衰・分散の依存するにめて高い波数成分の多い矩形分布ではその誤差が減衰・位相共に大きく重なりあって計算step毎に分散が促進されるが、低い波数の卓越するガウス状分布に近づくにつれ誤差は減衰し分散効果が少なくなることを示している。今階段状の初期条件を与えて計算すると(図-3)、二次差分の誤差が一次差分に比較して非常に小さいことがよくわかる。すなわち12時間後の最大濃度は一次差分では40%に対し二次差分では80%程度であり、24時間後でも70%程度であるが唯物理現象に合わない負の濃度の現われることは注目すべきである。一矢鎖線で示すimplicitなC-N法においても負の濃度が発生するがこれは初期濃度分布形状に原因するものである。例えばC-N法において連立方程式 $[A][C^{n+1}] = [C^n]$ を解く場合に右辺行列にゼロ要素を含むために早期stepでは濃度が負の値になることがあり、十分に滑らかな初期分布を与えるならば計算進行に伴ない負となることはないであろう。また濃度が負となることにより分布形状は歪み分布の中心は移流速度 $(u \Delta t)$ よりわずかにずれることになる。それ故負の最大濃度を最小にし得るような $\Delta x, \Delta t$ を選ばなければならない。

二次中心差分とC-N法とを比較するとその形状は相似しており、増幅因子の差による減衰よりはむしろ位相誤差に由来する減衰にその分布形状は影響を受けるといえる。またC-N法では振動が比較的大きく連立方程式を解くに要する演算時間の増加、分合流等境界条件および二次元場への拡散の繁雑さからいって、 Δx の安定条件による利約から解放される利点があるが、explicitな方法である二

次差分を用いる方が有用であろう。

歪みを是正するために3次の微分項を考慮したのが実線であり、表-1に示されるように数値減衰・速度位相共に誤差は非常に小さく、限界波数成分内では正確に移流する。負の濃度は発生するが $\max(C^-/C^+) = 0.134$ であり分散は誤差の範囲として容認できるのであろう。移流方程式(3)の3次中心差分式は次のようになる。

$$C_i^{n+1} = C_i^n - \frac{1}{2}F(C_{i+1}^n - C_{i-1}^n) + \frac{1}{2}F^2(C_{i+1}^n - 2C_i^n - C_{i-1}^n) + \frac{1}{12}(F+F^3)(C_{i+2}^n - 2C_{i+1}^n + 2C_{i-1}^n - C_{i-2}^n) \quad (8)$$

となり、4次項以下を打ち切り誤差として消去したことになる。これは式(1)の分散項を中心差分近似した際の打ち切り誤差に一致し、演算時間の増大を計らずに充分な精度で移流分散式を近似できる。

§-4 移流項を含んだ分散方程式の差分近似

移流項に由来する疑似分散誤差を消去できるように $\Delta x, \Delta t$ を選び ($F=1.0$)、分散項を中心差分した場合の増幅因子 G は Fourier 解析することにより

$$G = 1 - (1 + G_T)(1 - \cos \theta) - i \sin \theta \quad (9)$$

ここに、 $G_T \equiv D \cdot \Delta t / (\Delta x)^2$ 、 $\theta \equiv k \Delta x$ 、により、計算値は表-2で与えられる。 G_T の値により分散項の安定条件 ($G_T \leq 1/2$ 内) にあっても $|G|$ は1.0以上になる波数成分が存在し、解は不安定となる。従って、磨瀬河川・海域のような分散係数 D が非常に大きい場合には分散項を中心差分によって求めるのは不可能であるといえる。それ故、移流しつつ分散することを考えるならば、移流項を三次差分で、分散項を二次後退差分で差分近似するのがより適切で安定、且つ精度を高めて計算できるものと思われる。

表-2 AMPLIFICATION FACTOR ($F=1.0$)

$\frac{2\pi L}{\Delta x}$	CENTRED $G=0.02$	CENTRED $G=0.2$	BACK $G=0.2$
0°	1.0000	1.0000	1.0000
18°	0.9998	0.9814	0.9804
54°	0.9990	0.9129	0.8351
90°	1.0000	1.0770	0.6000
126°	1.0038	1.4662	0.3649
162°	1.0074	1.7588	0.2196
180°	1.0080	1.8000	0.2000

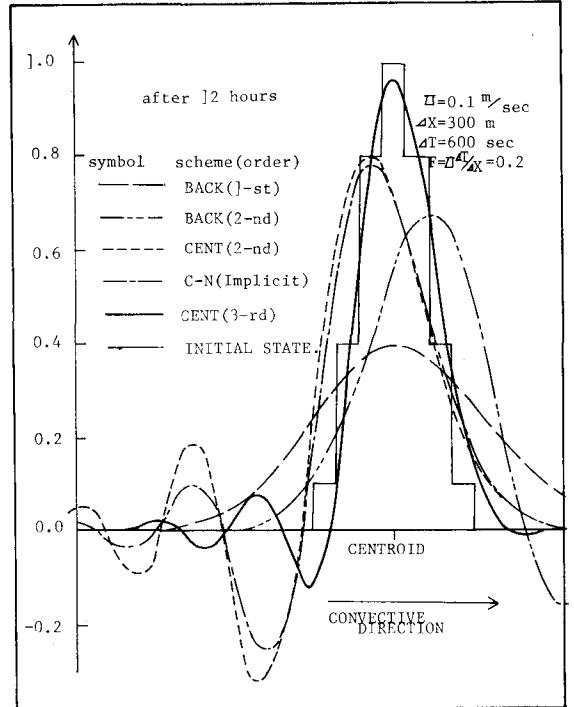


図-3 濃度分布(階段状初期分布)

《参考文献》

村岡・永井：一移流における疑似分散について

昭和47年度関西支部年講

伊藤編：数値計算の応用と基礎

アテネ出版

山口・野木：数値解析の基礎

共立出版