

京都大学防災研究所 正員 今本 博 健

乱流状態の流れにおける速度は時間的・空間的に変動しており、この現象の取扱いにおいては、時間的特性とともに空間的特性の解明が必要とされる。従来においては、これらの両特性を結びつける関係として、Taylor¹⁾の凍結乱流の仮定、すなわち、乱れ速度が平均速度に比し十分小さい場合、流下に伴う乱れの様相の変形は無視されるという仮定が広く用いられてきているが、Lin²⁾の研究より明らかかなように、開水路流れのようなせん断流れにこの仮定をそのまま適用することには多くの問題が残されている。本研究は、開水路流れにおける乱れの時空間構造の解明を目的として、主として、流下に伴う乱れの変形特性を明らかにしようとするものである。

1. 周波数・波数スペクトルの関係

乱れの時間的特性と空間的特性との関係は、通常、流体中の1点において時間的にただけ離れた乱れ速度間の相関を表わす自己相関関数あるいはEuler相関関数 $R(t)$ と、同時刻において流れ方向に x だけ離れた2点の乱れ速度間の相関を表わす空間相関関数あるいはTaylor-Kármán相関関数 $R(x)$ との関係によって検討されているが、周波数あるいは波数ごとの両特性間の関係を知るには、 $R(t)$ および $R(x)$ のそれぞれに対応する周波数スペクトル $S(f)$ および波数スペクトル $S(k)$ 間の関係についての検討が必要である。

いま、周波数を f (cycle/sec)、波数を k (rad/cm)とすると、 $S(f)$ および $S(k)$ は、それぞれ、

$$S(f) = 4 \int_0^{\infty} R(t) \cos 2\pi f t \, dt, \quad S(k) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} R(x) \cos kx \, dx \quad (1)$$

と表わされ、両者の間には

$$S(f) df = S(k) dk \quad (2)$$

の関係が成立するから、 $S(f)$ 、 $S(k)$ および df/dk あるいは dk/df のうちいずれが2量より残りの量は(2)より決定される。一方、移流速度 U_c は周波数と波数との比によって定義され、

$$U_c = 2\pi f/k \quad (3)$$

であるから、 U_c が既知の場合、 $S(f)$ 、 $S(k)$ の一方より他方が知れる。また、 $S(f)$ 、 $S(k)$ の両者が既知の場合には U_c が容易に決定される。したがって、 $S(f)$ 、 $S(k)$ および U_c が、それぞれ、

$$S(f) \sim f^a, \quad S(k) \sim k^b, \quad U_c(f) \sim f^d \quad (d \neq -1) \text{ or } U_c(k) \sim k^{\beta} \quad (\beta \neq -1), \quad a, b, d \text{ or } \beta: \text{const.} \quad (4)$$

と表わされる場合、(4)に用いられた定数間には次の関係式が成立する。

$$\alpha = (b-a)/(b+1) \quad \text{or} \quad \beta = (b-a)/(a+1) \quad (5)$$

凍結乱流の場合、流れの平均速度を U とすると、 $t = x/U$ のとき $R(t) = R(x)$ であるから、(1)より

$$S(f) = \frac{2\pi}{U} S(k), \quad f = \frac{U}{2\pi} k \quad (6)$$

が得られ、 $a=b$ 、 $\alpha=\beta=0$ となる。すなわち、 $S(f)$ と $S(k)$ との間には1次的な変換関係が成立するとともに、移流速度は周波数あるいは波数に比例なく一定で平均速度に一致することが知れる。また、非凍結乱流の場合のスペクトルとして、小倉³⁾によって導かれた乱れ速度が平均速度に比し十分大きい場合のスペクトル、すなわち、

$$S(f) \sim f^{-2}, \quad S(k) \sim k^{-5/3} \quad (7)$$

を用いると, (5)より $\alpha = -1/2$ or $\beta = -1/3$ が得られ, $U_c(f) \sim f^{-1/2}$ or $U_c(f) \sim k^{-1/3}$ となり, 移流速度は周波数あるいは波数によって変化し, スケールの大きな乱れ成分ほど移流速度は大きいことを示している。

なお, 日野⁴⁾は以上とほぼ同様の手法により砂れんのスペクトルについて次の平衡則を得ている。すなわち, 波数スペクトルについて次元解析的に $S(k) \sim k^{-3}$ を導くとともに, 移流速度として $U_c(k) \sim k^{-1}$ を用い, 低周波数領域における周波数スペクトル $S(f) \sim f^{-2}$ を得ている。ただし, 移流速度として芦田⁵⁾らの実験結果である $U_c(k) \sim k^{-1/2}$ を用いると $S(f) \sim f^{-7/3}$ となる。

以上の例より明らかのように, $S(f)$ と $S(k)$ との関係は U_c を仲介にすると容易に得られるが, 乱流の場合, 先に述べた(7)は極端な場合であって, 実際にはスペクトルの厳密な特性が知られている場合を除き, 上記の手法の適用は困難である。したがって, 実際の乱れの時空間構造を実験的に解明するには, 次の解析によるのが有効である。

2. 乱れの時空間構造の解析

乱れの時空間構造を知る一般的手法には, 相関解析およびスペクトル解析があり, 乱れ計測技術の進展に伴ってかなり広く用いられるようになってきているが, 要約すると次のようである。

2点 P, Q における乱れ速度 u_P, u_Q に關する時空間相関関数 $R_{PQ}(t)$ は次のように定義される。

$$R_{PQ}(t) = \overline{u_P(t_0) u_Q(t_0 + t)} \quad (8)$$

相互スペクトル $S_{PQ}(f)$ は $R_{PQ}(t)$ の Fourier 変換として表わされ

$$S_{PQ}(f) = 2 \int_0^\infty R_{PQ}(t) e^{-i2\pi f t} dt = R_{PQ}(f) - i Q_{PQ}(f) = \sqrt{S_{PP}(f) \cdot S_{QQ}(f)} \cdot C_{PQ}(f) e^{i\phi_{PQ}(f)} \quad (9)$$

ここに, $R_{PQ}(f)$ は co-spectrum, $Q_{PQ}(f)$ は quadrature-spectrum といわれ,

$$R_{PQ}(f) = 2 \int_0^\infty R_{PQ}(t) \cos 2\pi f t dt, \quad Q_{PQ}(f) = 2 \int_0^\infty R_{PQ}(t) \sin 2\pi f t dt \quad (10)$$

であり, $C_{PQ}(f)$ は周波数 f という成分についての相関を示す coherency, $\phi_{PQ}(f)$ は位相差を意味し,

$$C_{PQ}^2(f) = [R_{PQ}^2(f) + Q_{PQ}^2(f)] / S_{PP}(f) \cdot S_{QQ}(f), \quad \phi_{PQ}(f) = \tan^{-1} [Q_{PQ}(f) / R_{PQ}(f)] \quad (11)$$

と表わされる。

さて, P, Q の2点が一流れ方向軸上にあり, 2点間の距離を x とすると, 凍結乱流の場合,

$$R_{PQ}(t) = R_{PP}(t - \frac{x}{U}) \quad (12)$$

であるから, (12)を(10)を用いると, $R_{PQ}(f)$ および $Q_{PQ}(f)$ は次のようになる。

$$R_{PQ}(f) = 4 \cos 2\pi f \frac{x}{U} \cdot \int_0^\infty R_{PP}(t) \cos 2\pi f t dt, \quad Q_{PQ}(f) = 4 \sin 2\pi f \frac{x}{U} \cdot \int_0^\infty R_{PP} \cos 2\pi f t dt \quad (13)$$

したがって, $C_{PQ}^2(f)$ および $\phi_{PQ}(f)$ は

$$C_{PQ}^2(f) = 1, \quad \phi_{PQ}(f) = 2\pi f \frac{x}{U} \quad (14)$$

となり, coherency は x あるいは f に関係なく 1 となり, また, 移流速度 $U_{PQ}(f) = 2\pi f x / \phi_{PQ}(f)$ は平均速度 U に等しいことがわかる。

非凍結乱流の時空間相関関数は凍結乱流の場合とかなり異なり, 一般に, 次のような特性を示す。すなわち, $R_{PQ}(t)$ はある遅れ時間において最大値をとり, t とその遅れ時間との差が大きければ $R_{PQ}(t)$ は小さくなる。ただし, このような時間差がきわめて大きい場合には必ずしも $R_{PQ}(t)$ は減少するとは限らないが, 一般に, ここでは, $R_{PQ}(t)$ が最大となる t を最適遅れ時間といい, その時間における $R_{PQ}(t)$ を最大時空間相関値ということにする。後述の時空間相関関数の実測値より明らかのように, 最適遅れ時

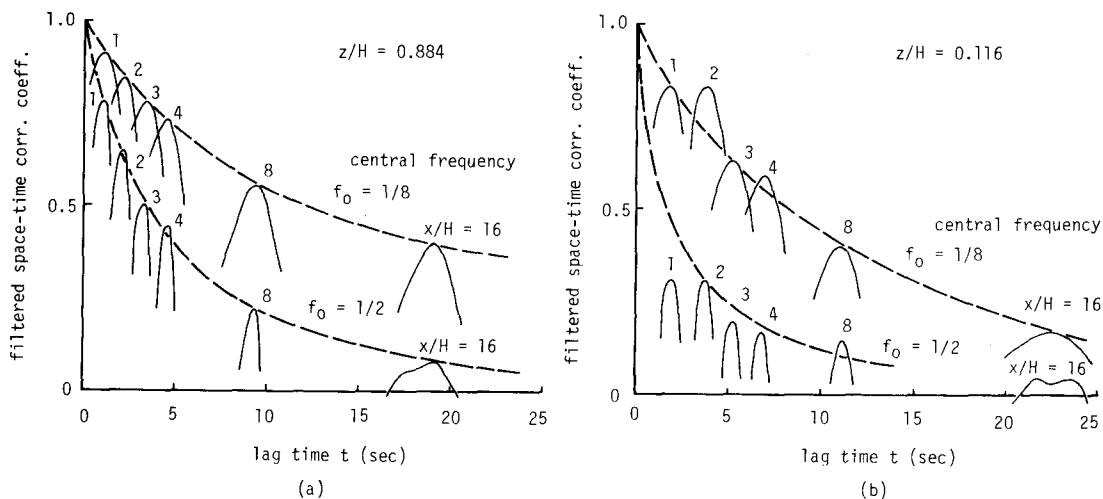


Fig.1 Space-time correlation coefficient for filtered turbulent velocity.

向は x の増加とともに増加するが、時空間相関係数の最大値は x の増加に伴って減少する。また、時空間相関係数の包絡線は平均流とともに流下する移動座標系から見た自己相関係数に相当し、流下に伴う乱れの変形過程を示している。以上の時空間相関係数の特性より容易に類推されるように、非束結乱流の coherence は x の増加によって減少し、移流速度も平均速度に等しいとは限らない。

3. 実測値による検討

一般に、相関係数には乱流場を構成するすべてのスケールの乱れが関与しているため、周波数あるいは波数ごとの特性を抽出するにはスペクトル解析がより有効であるが、データ処理上の都合により、本研究においては、時間的移動平均法によりフィルタ化された乱れ速度を相関解析することにした。すなわち、もとの乱れ速度を $u(t)$ 、その s および T 時間移動平均値をそれぞれ $u_s(t)$ および $u_T(t)$ とすると、フィルタ化乱れ速度 $u_f(t)$ は次のように表わされている。

$$u_f(t) = u_s(t) - u_T(t) = \frac{1}{s} \int_{t-s/2}^{t+s/2} u(t_1) dt_1 - \frac{1}{T} \int_{t-T/2}^{t+T/2} u(t_2) dt_2 \quad (15)$$

$u(t)$ に関するスペクトルを $S(f)$ とすると、 u_s^2 は

$$u_s^2 = \int_0^\infty \left[\frac{\sin \pi f s}{\pi f s} - \frac{\sin \pi f T}{\pi f T} \right]^2 S(f) df \quad (16)$$

となり、 $u_f(t)$ に関するスペクトルは $S(f)$ にフィルタ化関数 $\left[\frac{\sin \pi f s}{\pi f s} - \frac{\sin \pi f T}{\pi f T} \right]^2$ が乗じられたものであることがわかる。

本研究においては、フィルタ化乱れ速度の周波数領域として中央周波数 f_0 を基準に $\frac{1}{2}f_0$ から $\frac{3}{2}f_0$ の領域を対象とするため、 s および T は次のように選ばれている。

$$s = \frac{2}{3f_0}, \quad T = \frac{2}{f_0} \quad (17)$$

また、 f_0 としては、 $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}$ の 7 種の周波数が使われている。

Fig.1 は、濃尾用水導水路（水路幅 18m、水深 86cm）において、アロベラ式発電型流速計を用いて計測された乱れ速度を A-D 変換器によって数値化されたデータに前述の時間的移動平均法を適用して得られた時空間相関係数の一例として、自由表面近傍（ $z/H = 0.884$ ）および路床面近傍（ $z/H = 0.116$ ）における $f_0 = \frac{1}{2}$ および $\frac{1}{8} \text{ Hz}$ の場合に示したものであるが、これらの図より、時空間相関係数の最大値は距離の増加に伴って減少し、減少の割合は中央周波数が大きいものほど著しいことがわかる。この

ことはある一定距離を流下する向における乱れの変形度は中央周波数が大きいほど、すなわち、小さなスケールの成分ほど著しいことを示している。また、最大値近傍の時空相関係数は、中央周波数が一定のものについては距離の大きさに関係なくさきめて類似しておるとともに、中央周波数が大きいものほど尖っていることがわかる。

フィルター化乱れ速度に関する時空相関係数の特性をより明確にするため、時空相関係数の包絡線 (Fig.1において破線で示された曲線) $\Omega(t)$ の積分スケール T_m を指数関数形適合法により中央周波数ごとに求めると、Fig.2のようになる。 $\Omega(t)$ は、乱れ速度が平均速度に比し十分小さい場合には Lagrange 相関係数に相当し⁷⁾ したがって、

T_m は乱れ速度の寿命時間に相当するものであることがわかる。いま、乱れ場を構成する

種々の周期の乱れ成分がそれぞれの周期に対応する時間だけ流下する向の変形率は一定であると仮定すると、 T_m は $T_0 (=1/f_0)$ に比例することになり、中央周波数 f_0 についての $\Omega(t)$ は $f_0 t$ の関数として一般化される。さらに、 $\Omega(t)$ における t を流下距離と移流速度との比 x/U_c に置き換えると、 $\Omega(t)$ は x/U_c の関数によって一般化され、スペクトル解析における coherency は f_0/U_c となると予測される。

しかしながら、Fig.2に示された T_m と T_0 との関係によると、 $T_m \sim T_0^n$ としたときの指数 n は1より若干小さく、非凍結乱流の場合、ある周期の乱れ成分がその周期に相当する時間だけ流下する向の変形度は周期の大きなスケールのものほど著しいことがわかる。また、自由表面近傍と路床面近傍とを比較すると、後者についての n は前者のものに比しさらに小さく、路床面近傍における乱れの変形過程は非線形性に富むことがわかる。

本研究においては、開水路流れにおける乱れの時空相構造の特性について若干の考察をするとともに、フィルター化乱れ速度を用いた相関解析による実験的検討を加えたが、フィルター操作としての時間的移動平均法は理想的なフィルター関数とはかたはり異なり、その特性を示し、また、乱れ計測値についても搬送計設置による流れへの影響が無視されず、本研究の結果は定性的なものに留まっている。

参考文献

- 1) Taylor, G.I., Proc. Roy. Soc., A164, 476~490, 1938.
- 2) Lin, C.C., Quart. Appl. Math., 10, No.4, 295~306, 1953.
- 3) Ogura, Y., Jour. Meteor. Soc. Japan, 31, 355~369, 1953.

- 4) Hino, M., Jour. Fluid Mech., 34, 565~573, 1968.
- 5) 節田・田中, 京大防災研年報, 10-B, 14~32, 1967.
- 6) 今本・上野, 京大防災研年報, 15, 1972 (印刷中).
- 7) Hinze, J.O., Turbulence, McGraw-Hill, 1959.

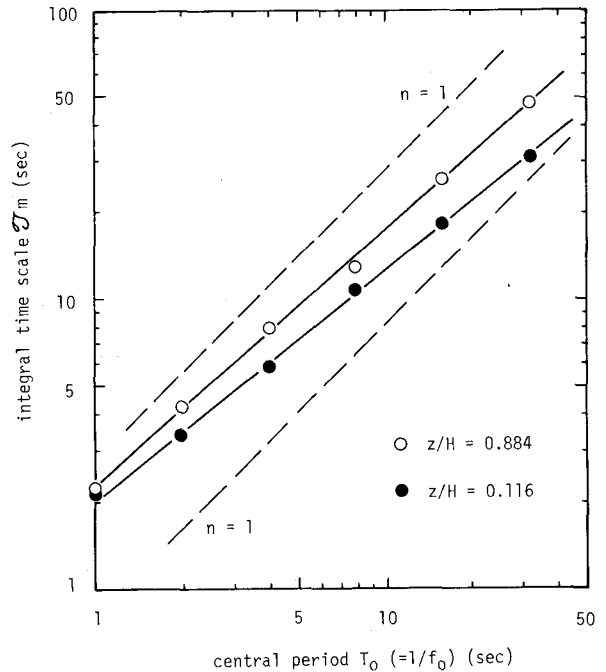


Fig.2 Integral time scale of maximum space-time correlation coefficient for filtered turbulent velocity.