

山梨大学工学部 正員 荻原能男

山梨大学工学部 正員 ○砂田憲吾

1. はじめに. 貯水池などよりの取水口附近に流出渦の発生することは、一般に良く知られているとおりである。この現象に理論的な裏付けをすることは現在のところ困難であって、多くの科学者がこの問題に取り組みながら解決されていない。最近では、J. L. Gordon の取水口に生ずる渦の実験的研究¹⁾、T. J. Pedley の解析的研究²⁾、H. O. Anwar³⁾、R. T. Hattersley⁴⁾、D. J. Woodford⁵⁾などの研究がある。筆者らもこれに関する研究を継続しているが⁶⁾水面に沿う流線上で Bernoulli の定理が成立しなくなるのが渦発生の原因であるとのエネルギーの立場より、解析を試みようと最近では考えている。本報告は、前年度に報告した流速分布の一樣性仮定にもとづく考え方を、より正確に取扱うために、Stokes の流れの関数を用いて鉛直平面内の流速分布を求め、エネルギー保存の立場より渦発生を理由を説明しようとしたものである。

2. 解析. 完全軸対称流の流出渦に対しては、図-1に示すような $r \sim \theta \sim z$ 円筒座標系で、 $r \sim z$ 平面内での解析が可能であって、Stokes の流れの関数 ψ の Potential Flow に対して満足すべき基礎方程式は通常の記号文字を用いて次式で与えられる。

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} = 0 \quad (1)$$

また、 r 方向、 z 方向の流速 u , w は次のように示される。

$$u = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad w = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \quad (2)$$

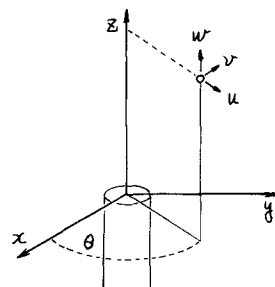


図 - 1

上の(1), (2)式を次のような無次元量を用いて書き改める。 r_0 = 流出口半径, Q = 流量, $h_0 = z_{r=r_0}$ (= かぶり水深), $w_0 = Q/\pi r_0$ とし、 $Q = 2\pi \psi_0$ であるから、

$$\xi = r/r_0, \quad \eta = z/r_0, \quad \eta_0 = h_0/r_0, \quad \psi = \psi/Q = 2\psi/w_0 r_0^2$$

$$v_\xi = u/w_0, \quad v_\eta = w/w_0, \quad v_\theta = v/w_0.$$

より、基礎方程式および流速は、

$$\frac{w_0}{2} \left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} - \frac{1}{\xi} \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \right] = 0 \quad (3), \quad v_\xi = -\frac{1}{2\xi} \frac{\partial \psi}{\partial \eta}, \quad v_\eta = \frac{1}{2\xi} \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \quad (4)$$

で与えられる。(1)式または(3)式を解析的に解く場合、仕様の境界条件に対して解を得るのは困難であるため、流れの関数 ψ は数値計算⁷⁾によることとした。渦が発生していない状態における流れを考察、図-2のように $\xi = 7$ で ξ 方向の流速 v_ξ を、 $\eta = -\eta_0$ で η 方向の流速 v_η を一樣とした条件を仮定する。基礎方程式に対して不等間隔格子点で

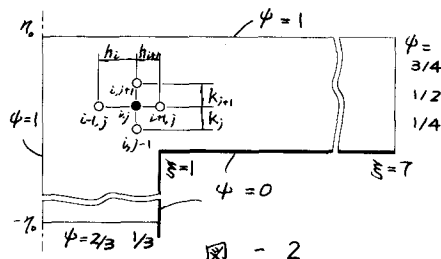


図 - 2

差分化すれば、(3)式の各項はそれぞれ、

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial \xi}\right)_{ij} = \frac{h_i}{h_{i+1}(h_i + h_{i+1})} \psi_{i+1,j} + \frac{h_{i+1} - h_i}{h_i h_{i+1}} \psi_{i,j} - \frac{h_{i+1}}{h_i(h_i + h_{i+1})} \psi_{i-1,j} - \frac{h_i h_{i+1}}{\delta} \left(\frac{\partial^3 \psi}{\partial \xi^3}\right)_{ij}$$

$$\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2}\right)_{ij} = \frac{2}{h_{j+1}(h_j + h_{j+1})} \psi_{i,j+1} + \frac{2}{h_j h_{j+1}} \psi_{i,j} + \frac{2}{h_j(h_j + h_{j+1})} \psi_{i,j-1} + \left[\frac{h_j - h_{j+1}}{3} \left(\frac{\partial^3 \psi}{\partial \eta^3}\right)_{ij} - \frac{h_j^2 - h_j h_{j+1} + h_{j+1}^2}{12} \left(\frac{\partial^4 \psi}{\partial \eta^4}\right)_{ij} \right]$$

$$\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2}\right)_{ij} = \frac{2}{h_{i+1}(h_i + h_{i+1})} \psi_{i+1,j} + \frac{2}{h_i h_{i+1}} \psi_{i,j} + \frac{2}{h_i(h_i + h_{i+1})} \psi_{i-1,j} + \left[\frac{h_i - h_{i+1}}{3} \left(\frac{\partial^3 \psi}{\partial \xi^3}\right)_{ij} - \frac{h_i^2 - h_i h_{i+1} + h_{i+1}^2}{12} \left(\frac{\partial^4 \psi}{\partial \xi^4}\right)_{ij} \right]$$

であるから、 ψ の3階微分の項以下を無視すれば、(3)式の差分近似式として、 ψ_{ij} について、

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2}\right)_{ij} + \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2}\right)_{ij} - \left(\frac{1}{\xi} \frac{\partial \psi}{\partial \xi}\right)_{ij} \approx & \frac{2}{h_{j+1}(h_j + h_{j+1})} \psi_{i,j+1} - \frac{2}{h_j h_{j+1}} \psi_{i,j} + \frac{2}{h_j(h_j + h_{j+1})} \psi_{i,j-1} + \frac{2}{h_{i+1}(h_i + h_{i+1})} \psi_{i+1,j} \\ & - \frac{2}{h_i h_{i+1}} \psi_{i,j} + \frac{2}{h_i(h_i + h_{i+1})} \psi_{i-1,j} \\ & - \frac{1}{\xi_{ij}} \left[\frac{h_i}{h_{i+1}(h_i + h_{i+1})} \psi_{i+1,j} + \frac{h_{i+1} - h_i}{h_i h_{i+1}} \psi_{i,j} - \frac{h_{i+1}}{h_i(h_i + h_{i+1})} \psi_{i-1,j} \right] = 0 \quad (5) \end{aligned}$$

また格子点等間隔区間では、

$$\frac{\psi_{i,j+1} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i,j-1}}{h^2} + \frac{\psi_{i+1,j} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i-1,j}}{h^2} - \frac{1}{\xi_{ij}} \frac{\psi_{i+1,j} - \psi_{i-1,j}}{2h} = 0 \quad (6)$$

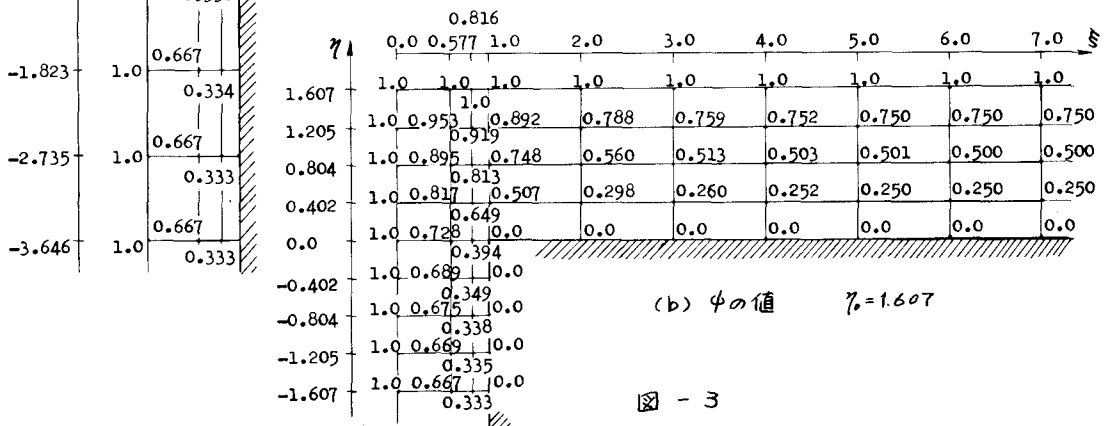
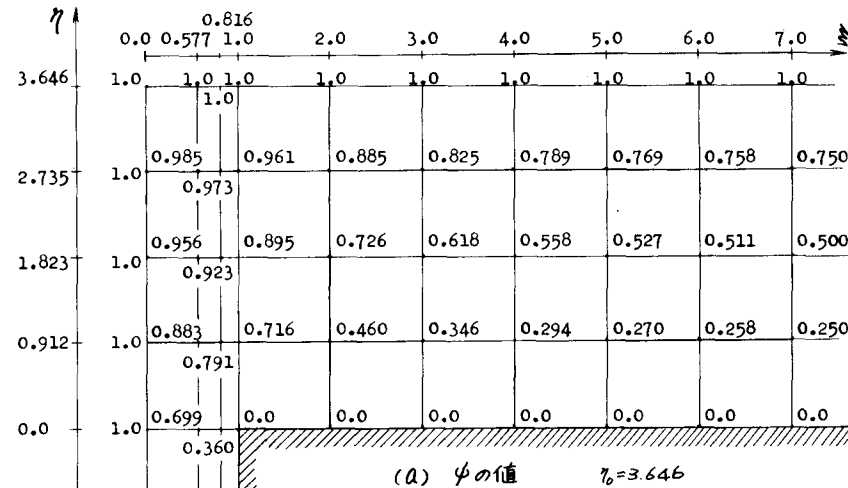


図 - 3

(5), (6)式より計算した結果の一部は図 - 3 (a), (b) のようになる。この結果からは渦の流線は容易に得られ、 $\eta_0 = 1.607$, $\eta_0 = 3.646$ の場合についてそれぞれ図 - 6, 図 - 7 のような流線が描ける。両者を比較すれば、Potential Flow の仮定

では水深の大きい渦ほど、 u_x , u_y の非一様性の範囲が拡大することが理解される。

得られた流れの関数 ψ を、 x 方向または y 方向に並んだ格子点に沿って滑らかな曲線で近似できれば任意の点の u_x , u_y が計算されるが、Lagrangeの補間法などのように高次方程式で置き換えただけでは、 ψ は x , y の単調な関数ではなくなることもある不都合である。数回この方法で試みたが、良好な結果は得られなかった。そこで各格子点周囲の流速を平均的に取扱って、(4)式より

$$\begin{cases} u_{xi} = -\frac{1}{2\Delta x_i} \frac{\psi_{i+1} - \psi_i}{\eta_{i+1} - \eta_i} \\ u_{yi} = \frac{1}{\Delta x_i + \Delta x_i} \frac{\psi_{i+1} - \psi_i}{\xi_{i+1} - \xi_i} \end{cases}$$

として x , y 方向の流速を求めた。前2者の例で u_x , u_y の分布を示せば、図-4, 図-5 のようになる。 u_x , u_y の両者とも、 $y=0$, $x=1$ の点附近で流速は卓越した値を持つ。従って前回までの報告のように、 $0 < x < 1$, $0 < y < h_0/10$ の範囲において一様な流速分布を仮定すると、水面における流速は $x=1$ 附近で u は過大に w は過小に、 $y=0$ 附近で u は過小に w は過大に見積られることになる。また、格子点間で平均的な流速を考えているため、 $x \rightarrow 1$, $y \rightarrow 0$ における u_x , u_y は正確ではないのでその部分は破線で示した。 $y < 0$ (流出管内) の領域の u_y の分布形状にも興味深いものがある。

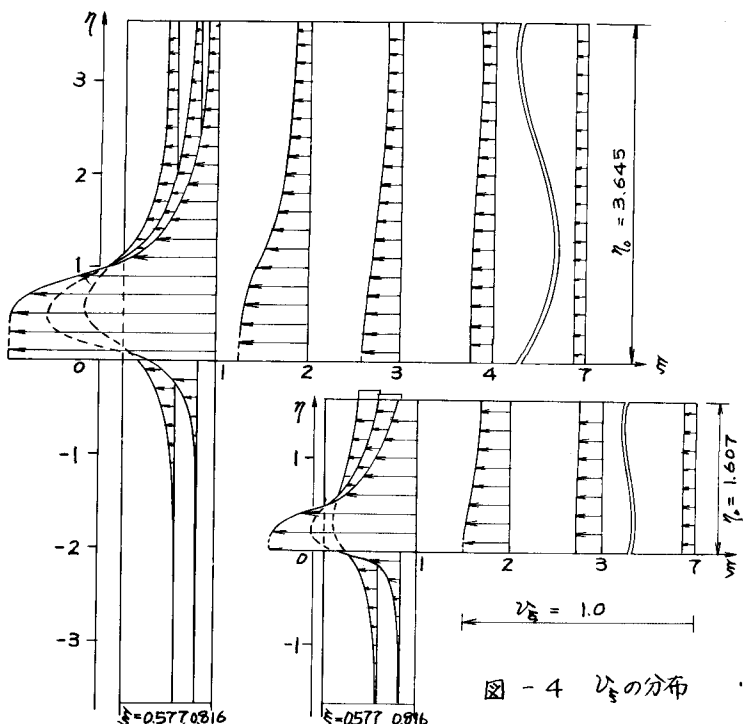


図-4 u_x の分布

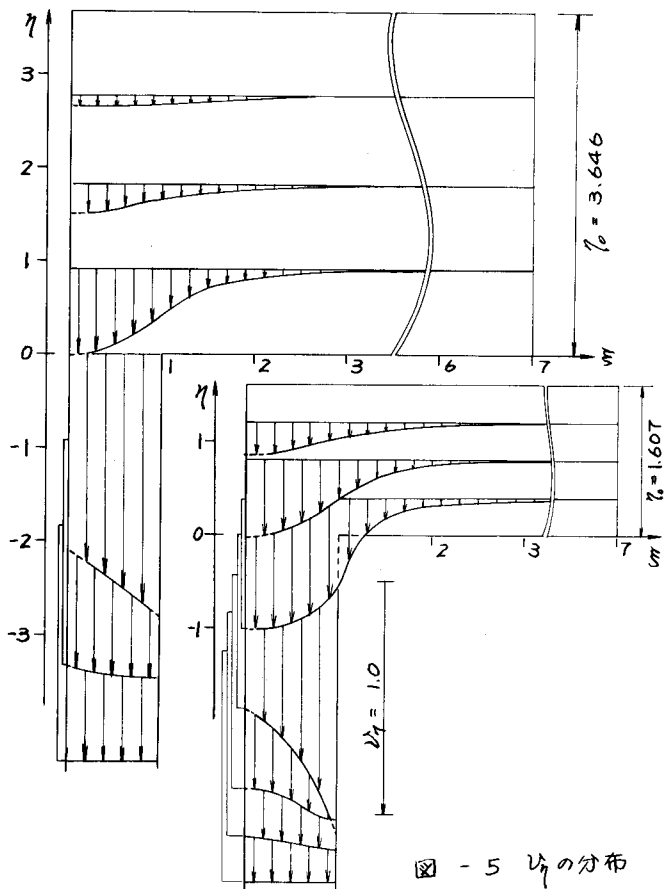


図-5 u_y の分布

る。いま、 $\psi = 1$ の流線を水面と考えるとこの水面で理論的に渦は発生していない。 ψ の1つの流線 $\psi = \psi_0$ に沿った全水頭(H)は Bernoulli's Theorem より

$$H = z + \frac{p}{\rho g} + \frac{1}{2g}(u^2 + w^2 + v^2) \quad (7)$$

となる。この流線が水面形を表わすものとするれば $p/\rho g = 0$ である。 $f = (Q/\pi r_0^2)/\sqrt{2g r_0}$, $r_0 = H/r_0$ として(7)式を無次元表示すれば

$$\eta_z = \eta + f^2 (v_z^2 + v_r^2 + v_\theta^2) \quad (8)$$

となる。安定した渦では $\eta_z = \eta_0 (= \text{const})$ であり(8)式を満足する。 η_0 の2種類についてそれぞれ $\psi_0 = 0.998$, 0.98 を水面とすると、図-6, 図-7のようになる。各流線に対する流速 v_z , v_r を求め、(8)式より

$$v_\theta = \sqrt{\frac{\eta_0 - \eta}{f^2} - (v_z^2 + v_r^2)} \quad (9)$$

として、円周方向の流速 v_θ が計算される。流量を与えて z 軸, r 軸に対してそれぞれ v_r , v_z を無視して得られた v_θ の結果は図-6, 図-7に示した。エネルギー保存

のために安定した渦に要求される v_θ が、水面に沿って $z \rightarrow 0$ に対し次第に増大するのが解る。

3. まとめ 流出渦の発生と不安定性とを論ずる場合、懸案であった流速分布を与えることができ、 θ 方向の流速も得られて、渦の発生についても説明された。また安定渦の条件である循環 $\Gamma = 2\pi r v_\theta$ を一定に保てるかどうかにより、渦の安定性や圧力分布についても論ずることが可能である。今後、多くの種類の渦の実験資料等を加えてさらに検討をすすめるつもりである。

参考文献

- 1) J.L.Gordon; Vortices at Intakes. Water Power, April 1970, pp. 137 - 138
- 2) T.J.Pedley; The Viscous Vortex Induced by a Sink on the Axis of a Circulating Fluid in the Pressure of a Plane Surface. J. Fluid Mech. (1969) Vol. 36, Part 2. pp.219-238
- 3) H.O.Anwar; Vortices at Low-Head Intakes. Water Power Nov. 1967, pp.455-457
Prevention of Vortices at Intakes. Water Power, Oct. 1968, pp.393-401
- 4) R.T.Hattersley; Hydraulic Design of Pump Intakes. Proc.ASCE Vol. 91, HY2, 1965, pp.223-249
- 5) D.J.Woodford; Prediction of the Length of the Air Core in Vortices of Weak Circulation. La Houille Blanche, No. 8 - 1964, pp. 889-899
- 6) 荻原; 流出渦の実験的研究、山梨大学工学部研究報告 13号, 昭37.12 PP.132-139
荻原; 同オ二報、同報告 15号, 昭39.12 PP.158-168
- 7) 磯田和男,大野 豊; FORTRANによる数値計算ハンドブック, オーム社 昭46.5

