

東洋大学 工学部 正員 本間 仁

〃 萩原 国宏

〃 福井 吉孝

河川における合流の水理学的な機構の究明を目的として、我々は研究に着手した。が、このための水理学的挙動の複雑さの故、合流機構を一気に解明する事は、はなはだ困難である事が判った。そこで、合流角度0度とみなせる平行流の混合合流に焦点を絞って、研究の一段階とし、解析を行ったので以下に記す。

1 理論的検討

Fig-1 に於いて、簡単のため、隔壁は流速に影響を及ぼさず、流速は二つの流体中に於いて、常に夫々、 U_1 , U_2 に等しく、流速分布の型はセリ断領域に行き起こされた乱流混合によつて出来ると仮定する。運動方程式はx方向で

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} \quad (1)$$

(1)に於いて、簡潔化の爲、 $\partial \bar{u} / \partial t = 0$, $\partial \bar{u} / \partial x = 0$, $X = 0$ と見

なす。

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \nu \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} = 0 \quad \dots\dots\dots (2)$$

(2)式を解く爲に、先ず相似性の仮定より、

$$\bar{u} / U_1 = f(\eta/x) \quad \dots\dots\dots (3)$$

次に、流れ関数を考える。

$$\psi = \int \bar{u} dy = \int U_1 f(\xi) x d\xi = x F(\xi) \quad \dots\dots\dots (4)$$

$$\text{但し } \xi = \eta/x, \quad F(\xi) = \int U_1 f(\xi) d\xi$$

$$\bar{u} = \partial \psi / \partial y = F'(\xi) \quad \dots\dots\dots (5)$$

$$\bar{v} = - \partial \psi / \partial x = -F(\xi) + F'(\xi) \frac{\eta}{x} \quad \dots\dots\dots (6)$$

また、

$$\partial \bar{u} / \partial x = F''(\xi) \frac{d\xi}{dx} = -\frac{\eta}{x^2} F''(\xi) \quad \dots\dots\dots (7)$$

$$\partial \bar{u} / \partial y = \frac{1}{x} F''(\xi) \quad \dots\dots\dots (8)$$

そして、Prandtl の混合距離の理論 (即ち、 $l = C_1 x$)、運動量輸送の理論より、

$$\tau_{xy} = \rho l^2 \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right| = \rho (C_1 x)^2 \left(\frac{F''(\xi)}{x} \right)^2 \quad \dots\dots\dots (9)$$

$$\partial \tau_{xy} / \partial y = \rho C_1^2 \cdot 2 F''(\xi) F'''(\xi) \frac{d\xi}{dy} = \rho C_1^2 F''(\xi) F'''(\xi) \cdot \frac{1}{x} \quad \dots\dots\dots (10)$$

(5), (6), (7), (8), (10) を (2) 式に代入して整理すると、

$$2 C_1^2 F''(\xi) + F(\xi) = 0 \quad \dots\dots\dots (11)$$

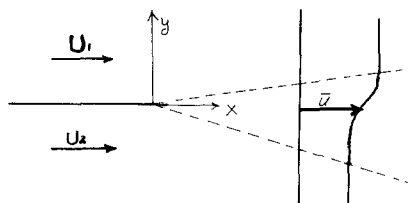


Fig.1

$$\gamma = \xi / \sqrt[3]{2C_1^2} \text{ とする。 (11) 式は}$$

$$F''(\gamma) + F(\gamma) = 0 \quad \text{----- (12)}$$

(12) 式を解く

$$F(\gamma) = C_1 e^{-\gamma} + C_2 e^{\gamma/2} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} \gamma + C_3 e^{\gamma/2} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} \gamma \quad \text{----- (13)}$$

$\gamma' = \gamma - \gamma_1$ とし、 γ を変換する。

$$F(\gamma') = d_1 e^{-\gamma'} + d_2 e^{\gamma'/2} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} \gamma' + d_3 e^{\gamma'/2} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} \gamma' \quad \text{----- (14)}$$

(14) 式を解く。境界条件 (1) ~ (4) を用いて計算を行う。

(i) $\gamma = \gamma_1$ 即ち $\gamma' = 0$ とする

$$\bar{u} = U_1 \quad [1]$$

$$\partial \bar{u} / \partial \gamma = \partial \bar{u} / \partial \gamma' = 0 \quad [0]$$

(ii) $\gamma = \gamma_2$ 即ち $\gamma' = \gamma_2'$ とする

$$\bar{u} = U_2 \quad [4]$$

$$\partial \bar{u} / \partial \gamma = \partial \bar{u} / \partial \gamma' = 0 \quad [5]$$

γ_1, γ_2 の値を代入して、 $\gamma' = 0$ のとき $\bar{u} = 0$ [6]

$$[1] \text{より} \quad U_1 / K = -d_1 + \frac{1}{2} d_2 + \frac{\sqrt{3}}{2} d_3 \quad \text{----- (15)}$$

$$[0] \text{より} \quad 0 = d_1 - \frac{1}{2} d_2 + \frac{\sqrt{3}}{2} d_3 \quad \text{----- (16)}$$

$$[6] \text{より} \quad 0 = -d_1 - d_2 + \gamma_1 \cdot \sigma / K \quad \text{但し、} \kappa = \frac{1}{\sqrt[3]{2C_1^2}} \quad \text{----- (17)}$$

$$[4] \text{より} \quad F(\gamma_2') = U_2 / K = -d_1 e^{-\gamma_2'} + \frac{1}{2} d_2 e^{\gamma_2'/2} \left(\cos \frac{\sqrt{3}}{2} \gamma_2' - \sqrt{3} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} \gamma_2' \right) \\ + \frac{1}{2} d_3 e^{\gamma_2'/2} \left(\sin \frac{\sqrt{3}}{2} \gamma_2' + \sqrt{3} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} \gamma_2' \right) \quad \text{----- (18)}$$

$$[5] \text{より} \quad 0 = d_1 e^{-\gamma_2'} + \frac{1}{2} d_2 e^{\gamma_2'/2} \left(\cos \frac{\sqrt{3}}{2} \gamma_2' + \sqrt{3} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} \gamma_2' \right) \\ + \frac{1}{2} d_3 e^{\gamma_2'/2} \left(\sqrt{3} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} \gamma_2' - \sin \frac{\sqrt{3}}{2} \gamma_2' \right) \quad \text{----- (19)}$$

(15), (16), (17) より

$$d_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sigma / K, \quad d_2 = \frac{1}{3} \cdot \sigma / K \cdot (1 + 2\gamma_1), \quad d_1 = \sigma / K \cdot \left(\frac{\gamma_1 - 1}{3} \right)$$

d_1, d_2, d_3 の値を (18), (19) に代入する。

$$0 = \sigma / K \cdot e^{-\gamma_2'} \left\{ \left(\frac{\gamma_1 - 1}{3} \right) + \frac{(1 + 2\gamma_1)}{6} \cdot e^{\frac{3}{2}\gamma_2'} \left(\cos \frac{\sqrt{3}}{2} \gamma_2' - \sqrt{3} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} \gamma_2' \right) \right. \\ \left. + \frac{1}{2\sqrt{3}} e^{\frac{3}{2}\gamma_2'} \left(\sin \frac{\sqrt{3}}{2} \gamma_2' + \sqrt{3} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} \gamma_2' \right) \right\} - \frac{1}{K} \quad \text{----- (18')}$$

$$0 = \left\{ \left(\frac{\gamma_1 - 1}{3} \right) - \frac{(1 + 2\gamma_1)}{6} \cdot e^{\frac{3}{2}\gamma_2'} \left(\cos \frac{\sqrt{3}}{2} \gamma_2' + \sqrt{3} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} \gamma_2' \right) \right. \\ \left. + \frac{1}{2\sqrt{3}} e^{\frac{3}{2}\gamma_2'} \left(\sqrt{3} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} \gamma_2' - \sin \frac{\sqrt{3}}{2} \gamma_2' \right) \right\} \quad \text{----- (19')}$$

(18') 式を変形して

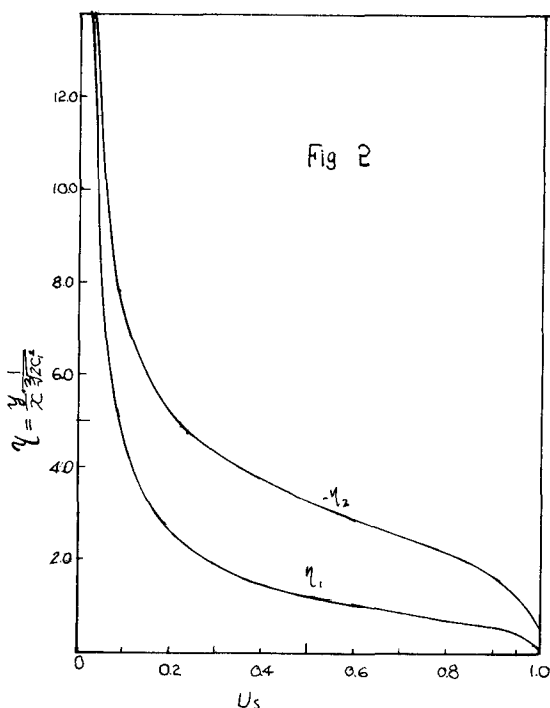
$$\gamma_2' = \frac{e^{\frac{3}{2}\gamma_2'} \left(\cos \frac{\sqrt{3}}{2} \gamma_2' - \sqrt{3} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} \gamma_2' \right) - 1}{e^{\frac{3}{2}\gamma_2'} \left(\cos \frac{\sqrt{3}}{2} \gamma_2' + \sqrt{3} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} \gamma_2' \right) - 1} \quad \text{----- (20)}$$

又、(18') 式は、(19') 式を利用すると次の通り

$$U_s = \frac{1}{e^{\frac{1}{2}\gamma_2'} \left(\cos \frac{\sqrt{3}}{2} \gamma_2' - \frac{1 + 2\gamma_1}{\sqrt{3}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} \gamma_2' \right)} \quad \text{----- (21)}$$

$$\text{但し、} U_s = U_2 / \sigma_1$$

$\eta_2 = \eta_2 - \eta_1$ である故、(20)、(21)式に於いて $U_s (= U_2/U_1)$ が与えられたならば、混合領域を示す η_2 が求められる。そして、 C_i が決まると混合領域内の流速分布が計算できるわけである。 U_1 を与えて η_2 を求めた結果が Fig. 2 である。



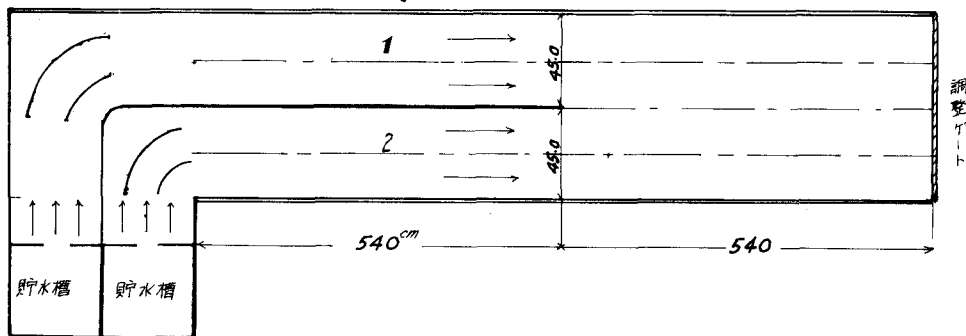
2. 実験

今回は、理論的検討によつて導き出した Fig. 2 と実験によつて求めた $\eta (= y/x)$ とから、混合距離係数 C_i の検討を行った。

1. では両側に拘束のない、即ち、無限大に横方向に広がった水路を仮定して検討を行ったわけであるが、こゝでは、ベニヤ板で Fig. 3 に示す型の水路を制作した。現在まで、勾配は $1/500$ 以下で実験を行つてきた。

Fig. 3

2.1
実験結果
として、
実験の結果は
主なもの
を Tab. 1 及
び Fig. 4



Tab. 1

5 に掲げておいた。

現在迄の実験の結果より判明した事を以下簡略に述べる。

(1) 混合距離 C_i
 C_i は $\eta = y/x \sqrt{2C_i}$ に於いて、実験より求めた流速分布図(例えば Fig. 4.5)から $\eta_1 (= y_1/x)$, $\eta_2 (= y_2/x)$

U_s	U_1	U_2	η_1	$\eta_2 = \frac{y_2}{x}$	C_i	η_2	$\eta_2 = \frac{y_2}{x}$	C_i
0.084	42.76	3.60	5.40	0.40	0.0143	8.22	0.40	0.0076
0.155	57.21	8.85	3.25	0.20	0.0108	5.85	0.20	0.0045
0.298	28.26	8.41	1.97	0.15	0.0148	4.28	0.20	0.0071
0.319	48.09	15.34	1.86	0.15	0.0159	4.21	0.20	0.0073
0.523	11.23	5.87	1.24	0.10	0.0162	3.22	0.10	0.0039
0.572	15.56	8.90	1.15	0.10	0.0181	3.00	0.15	0.0079
0.635	28.53	18.74	1.02	0.10	0.0217	2.77	0.15	0.0089
0.724	33.53	24.26	0.87	0.067	0.0151	2.45	0.12	0.0077

を、Fig-2より求めた Y_1, Y_2 を使う事に求められる。その結果、かなりばらつきがあるが、1側には $0.01 \sim 0.02$ 、2側には $0.004 \sim 0.009$ といったおおまかな違いが読みとれ、 C_1 の値は1側、2側で別々の値を示していると考えられる。(尚、以後1側のを C_1 、2側のを C_2' とする。)

上記 C_1, C_2' の値は、Tollmien: 0.0174, 佐藤・細井: 0.0197, 本間・千秋: 0.0129~0.0180といった今迄に提唱された値と比較して、 C_1 は大体、類似した値となっている一方、 C_2' はかなり小さな値を示している。又、 U_s が1.0に近い場合、例えば、Fig-5に示す様な場合、図から Y の値を読み取る事は困難となり、従って、 C_1, C_2' の値は提示できなかった。尚、 Y_1, Y_2 の値は $x=50 \sim 100 \text{ cm}$ 位までは増加するがそれ以降は殆んど流りの増加を識別できないケースが多い。

(2) 隔壁

Fig-5に示されている様にかなりばらつきがあり、流速分布に影響を及ぼしている。

(3) 流速分布と流下距離

現在の水路では、単一水路に於いて通常示される流速分布形を示すまでの流下距離を求めようとした例が多く判然としていない。

以上、H. Rouse「Advanced Mechanics of Fluids」、岸「水理学演習(2)」を参照して行ってきた研究の結果である。が今後の研究に於いて、不明の点を明らかにしていく所存である。

