

東京工業大学 正員 吉川 秀夫
東京工業大学 正員 ○池田 駿介

1 まえがき

水流が一方向に弯曲している水路を流下する場合には、流れの上層と下層で流体粒子に働く遠心力の大きさが異なる為、上層では外向き、下層では内向きの二次流れが発生する。しかもその際にこの二次的な流れの為に、上層と下層の間で運動量の交換がおこり、主流の深さ方向の速度分布が均一化されるという現象が生ずる。さらに流れが弯曲水路を充分長く流下し、流れ方向に変化がみられなくなると主流の radial 方向の速度分布は“自由渦”とは異なり、流体粒子は outer bank の方で速く流れるようになる。この点については図-2 に示されている筆者等が実験結果からも明らかである。本論文においては、このような主流と二次流の間の相互依存と、水流が outer bank 側でより速く流れるという現象を、流れが流下方向に変化しなくなった場合について解析的に論じた。

2 基礎方程式

流れが流下方向に変化せず、しかも水路中と水路中心における半径が水深に較べて充分に大きいとすると、このような場合の運動方程式は円筒座標系で次のように書ける。

$$U_r \frac{\partial U_r}{\partial R} + U_z \frac{\partial U_r}{\partial Z} - \frac{U_\theta^2}{R} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial R} + \nu \frac{\partial^2 U_r}{\partial Z^2} \quad (1)$$

$$U_r \frac{\partial U_\theta}{\partial R} + U_z \frac{\partial U_\theta}{\partial Z} + \frac{U_r U_\theta}{R} = g \sin \alpha + \nu \frac{\partial^2 U_\theta}{\partial Z^2} \quad (2)$$

$$U_r \frac{\partial U_z}{\partial R} + U_z \frac{\partial U_z}{\partial Z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial Z} - g \cos \alpha + \nu \frac{\partial^2 U_z}{\partial Z^2} \quad (3)$$

連続式は

$$\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (R U_r) + \frac{\partial U_z}{\partial Z} = 0 \quad (4)$$

である。ここに座標系、および各文字の持つ意味は図-1 に示す通りであり、 α は流れ方向への水面勾配である。方程式を無次元化する為に代表長さ、代表速度を水路中心、水面での値にとることにすれば無次元量はそれぞれ次のように書ける。

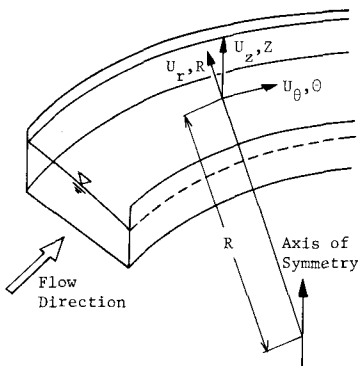


Fig.1 Schematic view of the model.

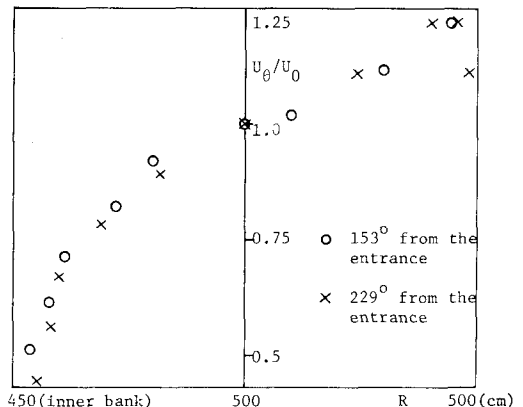


Fig.2 Velocity distributions at the surface.

$$r = R/R_0, \quad z = Z/R_0, \quad h = H/R_0$$

$$u = U/U_0, \quad v = V/U_0, \quad w = W/U_0$$

ここに H は水深である。これらを上式に代入し、しかも(3)式からは静水圧のみを考慮すれば、方程式は

$$u \frac{\partial u}{\partial r} + w \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{v^2}{r} = -G \frac{dh}{dr} + Re^{-1} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (5)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial r} + w \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{uv}{r} = Gz + Re^{-1} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \quad (6)$$

$$\frac{\partial}{\partial r}(ru) + \frac{\partial}{\partial z}(rw) = 0 \quad (7)$$

ここに

$$G = gR_0/U_0^2, \quad Re = R_0U_0/\nu$$

である。二次流れに対する流れ函数 ψ を次のように定義する。

$$u = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad w = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}$$

これらと(5)、(6)および(7)に代入して

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \left(-\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial z} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \left(-\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) - \frac{v^2}{r} = -G \frac{dh}{dr} + Re^{-1} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \quad (8)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{v}{r} \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} = Gz + Re^{-1} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \quad (9)$$

を得る。ここで従属変数は v, ψ および h の三個、独立変数は r, z の二個であるが、このままでは数値計算を行う以外に上式を解く手段がないので、変数変換を行い常微分化する。本論では水路中が水深に較べて大きい場合について考えているので、上式の各項が r について無関係となる条件について調べる。変数を

$$\eta = z/R_0^{\frac{1}{2}} r^a$$

$$v = r^p V(\eta)$$

$$\psi = Re^{\frac{1}{2}} r^b \varphi(\eta)$$

$$\frac{dh}{dr} = \left(\frac{dh}{dr} \right)_0 r^q$$

とおき、(8)、(9)の両式に代入し次の式を得る。

$$r^{2b-2a-1} \{ -\varphi'^2 + (b-a)\varphi'^2 - 2\eta\varphi'\varphi'' - (2\eta-a\eta\varphi')\varphi'' \} - r^{2p+1}V^2 = -G \left(\frac{dh}{dr} \right)_0 r^{q+b} + r^{b-3a+1}\varphi'' \quad (10)$$

$$r^{b-a+p-1} \{ \varphi'(pV-a\eta V') - (2\eta-a\eta\varphi')V' + V\varphi' \} = g\eta r + r^{b-2a+1}V' \quad (11)$$

r について無関係になるには次の条件を満たさなければならない。

$$2b-2a-1 = 2p+1$$

$$2b-2a-1 = 2+q$$

$$2b-2a-1 = b-3a+1$$

$$b-a+p-1 = 1$$

$$b-a+p-1 = p-2a+1$$

未知数が四個，方程式が五個であるが，値は unique に決まり。

$$P = \frac{1}{2}, \quad \beta = 0, \quad \alpha = \frac{1}{4}, \quad \epsilon = \frac{7}{4}, \quad (12)$$

を得る。よって最終的に基礎方程式は

$$\varphi'' + \frac{7}{4} \varphi \varphi'' - \frac{1}{2} \varphi'^2 = G \frac{\alpha h}{2F} - V^2 \quad (13)$$

$$V'' + \frac{7}{4} \varphi V' - \frac{3}{2} \varphi' V = -G \epsilon \quad (14)$$

となる。境界条件については底面での速度が0，水面で shear がないという条件から，

$$\eta = 0; \quad \varphi = 0, \quad \varphi' = 0, \quad V = 0 \quad (15)$$

$$\eta = \eta_0; \quad \varphi = 0, \quad \varphi' = 0, \quad V = 1, \quad V' = 0 \quad (16)$$

である。

3. 計算結果とその考察

式(13), (14)を境界条件(15), (16)の下で解くに当っては線型方程式

$$\varphi_1'' = G \frac{\alpha h}{2F} - V_1^2 \quad (17)$$

$$V_1'' = -G \epsilon \quad (18)$$

を解き，まず第一近似解 φ_1, V_1 を求める。次に第二近似解を

$$\varphi_2'' + \frac{7}{4} \varphi_1 \varphi_2'' - \frac{1}{2} \varphi_1'^2 = G \frac{\alpha h}{2F} - V_2^2 \quad (19)$$

$$V_2'' + \frac{7}{4} \varphi_1 V_2' - \frac{3}{2} \varphi_1' V_2 = -G \epsilon \quad (20)$$

より求め以下同様にして近似度を高める。この時，境界条件(15), (16)をみたすように積分定数五個および水面勾配を定める。非線型項を考慮に入れた第二近似解まで計算され図-3に示されている。計算は積分を手計算で行ったので繁雑になるのを防ぐ為に無次元の水面高さ η_0 を1にとっている。二次流れについては非線型項はほとんど無視しうることを加わめる。すなわち，radial 方向

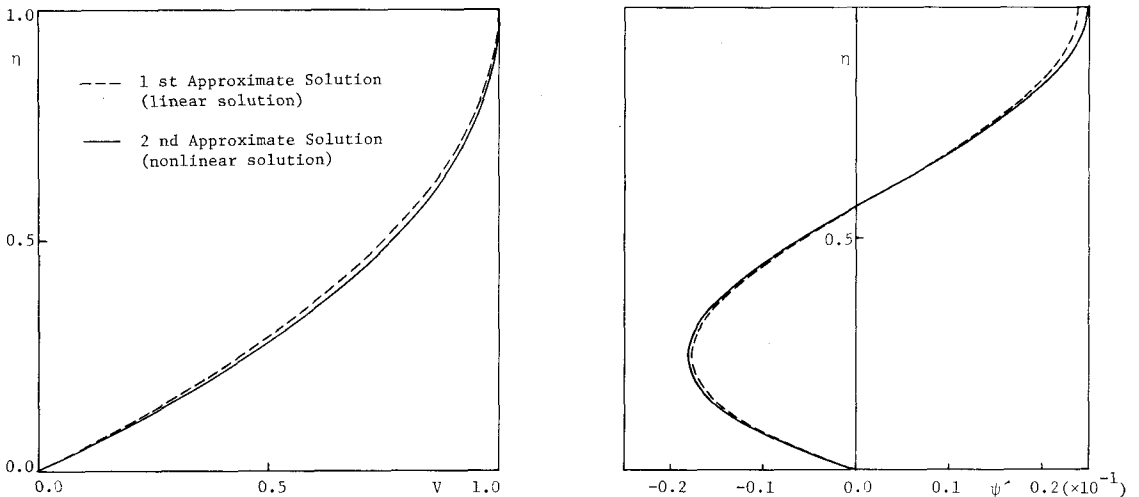


Fig.3 Solutions of V and ψ .

の二次流れはほとんど遠心力、水面による圧力勾配および摩擦力の釣合った流れといえる。主流の深さ方向の速度分布については、二次流れによって速度分布が均一化される傾向が示されている。

しかしここでは 1 case についてのみしか計算を実行していないので無次元水深 z を R_2 あるいは水深 h を変えることによって変化した時に二次流れの大きさがどのように変化するかということについては明らかでない。この点については今後の検討を要すると思われる。又、この解では側壁の影響が直接的に方程式の上で考慮されていないので、水路の側壁に近い領域ではこれまで述べて来たような流れとは異った流れになっていると思われる。側壁の付近について流れの場を定めるには更に複雑な方程式を数値解法を用いて解く必要があり、これは別の機会にやすることにする。

4 結 び

以上の考察によって次の二点が明らかになった。

- (1) 流れが弯曲水路を充分長く流下すると、流れの速度は内岸よりも外岸側で早く流れるようになり、ここでは

$$v = r^{\frac{1}{2}} V(z)$$

で表わされる。

- (2) 二次流れは主流の深さ方向の速度分布を均一化させる効果を持つ。これは図-3 から示される。

図-2 の実験結果は土木工学科水工研究室の佐藤郁太郎技官、および大学院大川秀雄の両氏によるものであり、記して謝意を表わします。

参考文献

- (1) Yen, B.C.; Characteristics of Subcritical Flow in a Meandering Channel, Institute of Hydraulic Research, The Univ. of Iowa, 1965.
(2) Rozovskii, I.L.; Flow of Water in Bends of Open Channel, Academy Sciences of the USSR, 1957.
(3) Stewartson, K.; On Rotating Laminar Boundary Layers, Boundary Layer Research, Springer-Verlag, 1957.
(4) Rogers, M.H. & G.N. Lance; The Boundary Layer on a Disk of Finite Radius in a Rotating Fluid, Quart. Journ. of Mech. and Appl. Math., 17, 1964.