

中央大学理工学部 正員 林 泰 造

1. まえがき

筆者は先の研究¹⁾²⁾において、河川蛇行の発生範囲についての研究を行ってきた。それによると、交互砂堆の発生条件は Froude 数が 1 より大きい場合には松下博士によって得られていた実験結果にほぼ適合すると思われる結果が得られていたが、Froude 数が 1 より小さくなるにつれて、実験結果を説明するものは理論から得られた発生範囲が余りに広すぎると思われるようになると判っていた。この点については理論の改良を試みたのが前報³⁾であったが、今からみると、その理論の基本仮定の中に余りにも推定的な箇所があって適当ではなかったと思われる。

筆者のこれらの研究においてはいずれも、理論の骨組と形成するものは 3次元ポテンシャル流理論であるが、このような理論的に単純な流れにおいても、その水流と流砂量との間における bi-lateral な相互関係の中に河床波を不安定にする原因があると考え、その相互関係などのような関係式を求めておれば表わすことができるかという点にむけて研究の焦点を絞った。本報においてもその立場は同じであるが、従来よりも適当であると思われる新しい理論モデルに基づいて考察を行う。

2. 理論の基本式

以下に記載する 2・a は内容的に従来の理論と同じものであるが、摘要のみを記す。2・b が基本式として新しい部分である。

2・a. 水流の基本式

河床面に図-1. のような 3次元正弦波的な微扰を仮定する。

$$\eta(x, z, t) = a(t) \sin \epsilon(x - U_b t) \cos \ell z \quad (1)$$

ただし、 a : 河床波の振幅、 ϵ : 河床波 x 方向の波数、

U_b : 河床波の移動速度、 ℓ : 河床波の z 方向の波数で $\ell = \pi/B$,

B : 水路中、である。この河床波の形は水面に起る微扰の形は次のようであると考えた。

$$\zeta = \zeta(x, z, t) = A(t) \sin \epsilon(x - U_b t) \cos \ell z \quad \dots \dots \dots (2)$$

3次元ポテンシャル流を仮定し、 ϕ を速度ポテンシャルとする。流れに対する境界条件は次のようである。

$$y = 0: \quad \zeta_t + U \phi_x = \phi_y \quad \dots \dots \dots (3)$$

$$y = 0: \quad \phi_t + g \zeta + \frac{1}{2} (\phi_x^2 + \phi_y^2 + \phi_z^2) = \text{const.} \quad \dots \dots \dots (4)$$

$$y = -d: \quad \eta_t + U \eta_x = \phi_y \quad \dots \dots \dots (5)$$

この境界条件のもとに、 $\epsilon \ll a/U$ あるいは $U_b \ll U$ と仮定して、Laplace の

$$\text{方程式とくと、} \quad \phi = Ux - \frac{U \epsilon}{\beta} a \frac{\cosh \beta y + (F^2 \epsilon^2 d / \beta) \sinh \beta y}{\sinh \beta d - (F^2 \epsilon^2 d / \beta) \cosh \beta d} \cos \epsilon(x - U_b t) \cdot \cos \ell z \quad \dots \dots \dots (6)$$

ただし、 $\beta = \sqrt{\epsilon^2 + \ell^2}$, $F = U/\sqrt{gd}$: Froude 数、である。

このようにして流れのポテンシャルが判ると、これから次の2つの関係式が得られる。

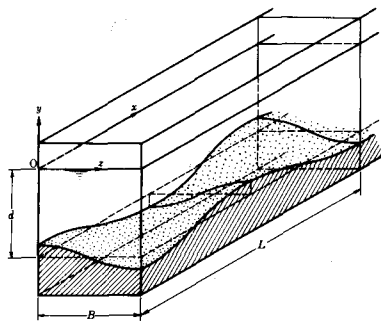


図-1.

$$\frac{A(t)}{a(t)} = - \frac{F^2 k^2 d / \beta}{[\tanh \beta d - (F^2 k^2 d / \beta)] \cosh \beta d} \quad \therefore (7) \quad \frac{dz}{dx} = \frac{k l}{\beta} a \frac{1 - (F^2 k^2 d / \beta) \tanh \beta d}{\tanh \beta d - (F^2 k^2 d / \beta)} \cdot \cos k(x - U_b t) \sin l z \quad (8)$$

ただし、 dz/dx は河床面 ($y = -d$) における流れの方向、また、 F_a および F_2 はそれぞれ次の値の Froude 数である。

$$F_a^2 = \frac{\beta d \tanh \beta d}{(k d)^2} \quad \therefore (9)$$

$$F_2^2 = \frac{\beta d \coth \beta d}{(k d)^2} \quad \therefore (10)$$

図-2. は $F < F_a$ の場合すなわち常流の場合の自由水面、河床面および河床面流線を示したものであり、図-3. は $F_a < F < F_2$ の場合、すなわち、射流ではあるが $F < F_2$ の場合、のそれらを示したものである。3次元正弦表面波の波速 c は

$$c^2 = \frac{g \beta}{k^2} \tanh \beta d$$

と与えられるから、 F_a は3次元正弦波の無次元波速に当る。

2. b. 水流と流動量との bi-lateral な相互関係

通常の流動量公式の多くは、流動量 Q の大きさは局所流速 u の大きさのみによって定まる、すなわち、

$$Q(x, z, t) = f[u(x, z, t)] \quad \therefore (11)$$

と考えている。しかし、このような水流から流動量への一方向的な (uni-lateral な) 形で述べた関係式をもちいて河床の不安定性を説明することはできない。そこで、前報

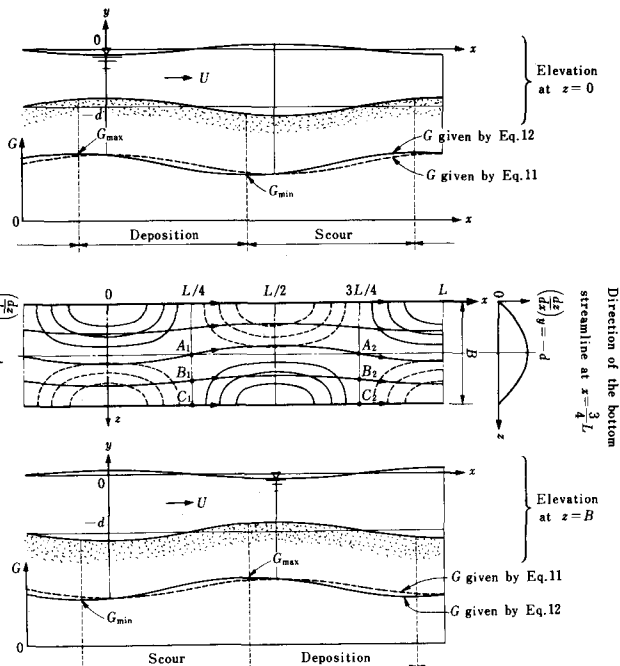


図-2. 常流の場合

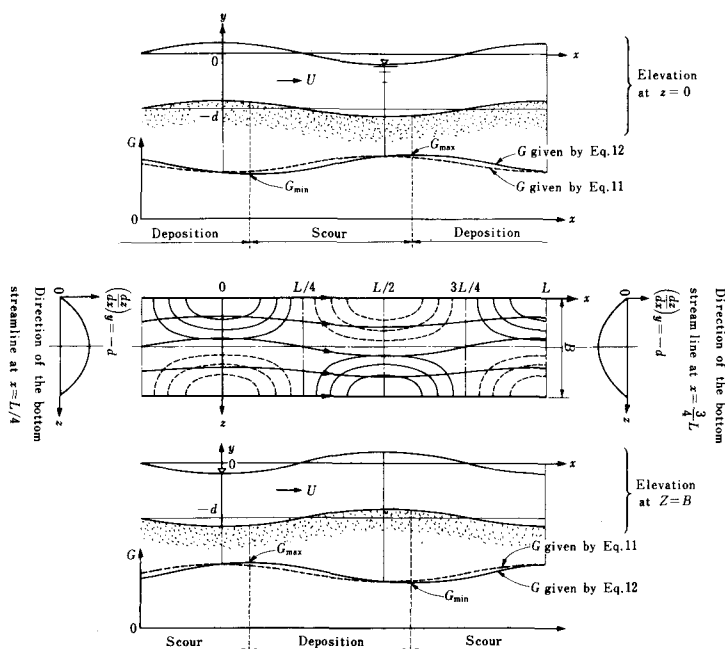


図-3. 射流の場合、但し $F < F_2$

ではおいては筆者は

$$G(x, z, t) = (1 + \alpha \partial \eta / \partial s) \cdot f[u(x, z, t)] \dots \dots \dots (12)$$

なる関係式により水流と流砂量との関係を bi-lateral 化して置く。この $\partial \eta / \partial s$ は河床波の局所波形勾配であり、 α は無次元の係数である。河床の不安定性に対する主原因である流砂量の“非対称性”が、この $\alpha \partial \eta / \partial s$ の項の導入により式の中に表現されることになる。

しかし、新に考え直してみても、2次元砂堆 (dunes) のように波長が比較的短いものの場合には波形勾配の影響はかなり大きいものと推定されるが、蛇行砂堆のように波長が長い場合には、波形勾配の影響はかなり小さいものになると考えられるから、流砂量の“非対称性”を (12) の形で表わし続けることが適当であるかどうかの新しい疑問となってくる。そこで、流砂量の“非対称性”を説明すべく出発点の (11) に立戻り、2、新しく次のように考える。

図-2. の B_1 点と B_2 点における各流砂量の大さを比較すると、従来の (11) によれば両者は等しくなる筈であるが、実際には B_2 点は砂堆の遮蔽された部分にあるから B_2 点の流砂量は (11) で与えられるものより小さく、逆に B_1 点の流砂量は (11) で与えられるものよりいくらか大きいものと考えられる。しかし、もし B_1 点附近の流線の方向が本路軸方向から傾いてい
ても、図-4. のようにすべてが平行であれば B_1 点の流砂量は (11) で与えられ
るものも等しくなるであろう。このことから、(11) の補正は関係するものは流線の
方向 dZ/dx ではなくて、方向変化の割合 $\frac{\partial}{\partial x} (dZ/dx)$ であると考えられる。
図-4.

図-2. および図-3. の中では $\alpha = L/4$ および $\alpha = 3L/4$ における
 $\frac{\partial}{\partial x} (dZ/dx)$ の値が記してある。このようにして (11) を補正し、これと (12) に代える
のとして、2、12次式を考える。

$$G(x, z, t) = m \cdot \left[1 + \alpha B \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \frac{dZ(x-\delta)}{dx} \right\}_{y=-d} \right] \left[u(x-\delta, z, t) \right]^n \dots \dots (13)$$

ただし、 α : 無次元係数、 δ : 局所流砂量が局所掃流力より遅れる距離、 n : 無次元定数、 m : 次元定数、である。(13) によれば、図-2. の C_1 , C_2 両点を通る流線は直線であるが図-3. の C_1 点の流砂量は C_2 点のそれより大きくなり、また、 A_1 , A_2 の両点を通る流線は“自由”蛇行しており、両点における流砂量は等しくなることを特に注意される。

図-2. および図-3. の中では (13) で $\delta = 0$ の場合の G の左右分布曲線が定性的に示されている。 $z = 0$ および B の断面における河床変化を記述する方程式は近似的に

$\eta_t + G_x = 0$ となるから、 $G_x > 0$ は洗掘、 $G_x < 0$ は堆積が起こる。その結果、図示のように河床波頂には堆積が、河床波底には洗掘が起こり、堰中では増大してゆくことがみられる。

定量的に取扱うためには、河床変動の方程式は $\eta_t + (G_1)_x + (G_3)_z = 0 \dots (14)$
とし、 G_1 , G_3 : それぞれ局所流砂量 G の左右および z 方向の成分であり、

$$G_1 \doteq G, \quad G_3 = G \cdot (dz/dx)_{y=-d} \dots \dots \dots (15)$$

である。(13) と (8) と (15) に代入し、その (15) と (14) に代入すると、

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \bar{G} \left[\alpha B \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{dZ(x-\delta)}{dx} + \frac{n}{U} \frac{\partial^2 \bar{\phi}(x-\delta, -d, z, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{dZ}{dx} \right] = 0 \dots (16)$$

$\pi(1), \bar{G} = mU^2, \bar{\phi} = \phi - Ux$ とある。さらに (1), (6), (8) に式 (14) を代入して式 (15) を解くと、その解として 2 次式を得る。

$$a(t) = a(0) \exp \left[\bar{G} (\hbar^2 / \beta) f_b (\alpha B \theta l^2 - n \hbar^2 \delta) t \right] \quad \dots \dots \dots (17)$$

$$U_b = (\bar{G} f_b / \beta) [k^2 (n + \alpha B \delta l^2) + l^2] \dots \dots \dots (18)$$

$$\text{And, } f_b = \frac{1 - (F^2 k^2 d / \beta) \tanh \beta d}{\tanh \beta d - (F^2 k^2 d / \beta)} = \tanh \beta d \frac{F_2^2 - F^2}{F_a^2 - F^2} \dots \dots (19)$$

(17) から河床波の安定限界は次式で与えられることがわかる。

$$f_b = 0 \quad \cdot \cdot (20), \quad \alpha B \ell^2 - n k^2 \delta = 0 \quad \cdot \cdot (21), \quad (f_b \otimes \text{分母}) = 0 \quad \cdot \cdot (22)$$

(20) と (22) とから, $F = F_2$ かつ $F = F_a$ である。(21)は

$$k^2 = \alpha B l^2 / n \delta \dots (21.a) \quad \text{となるが, } Z \text{ の式により } k \text{ の値を知れば } \delta \text{ の値}$$

と知らぬことはない。導力の距離 δ は $2 \sim 12$ 程度有と考之 α とは自然であるから、 $\delta =$

const. U と仮定する。2.12, const. は T の次元 n かつ A の 2 次 z の z^2 , z の z と n

ら $\delta \propto \varepsilon \sqrt{d/g} U \cdots \cdots (23)$ と仮定する。ただし, ε は無次元の

係數之值。(23) 式代入 (21) 式可得, $R^2 = (\alpha\pi/n\varepsilon)(B/U)\sqrt{g/d}$ 可得,

$$F = \left(\frac{2\pi}{c}\right)^2 \frac{d}{B} \frac{1}{(kd)^2} \equiv F_1, \quad \dots \dots \dots (24)$$

Σ 70. πικ C = 2√ηε/α 700. ε

および α の値は未だ判っていないものの 2° , C の値は理論的には未だ不明である。Z. Z. Z. Simons 等の実験⁴⁾と比較して $C \cong 72$ とする。図-5 は $d/B = 0.08$ の場合の安定域を四角に示すのである。

3. 蛇行波長

(17) から河床波の初期増中率 α は次式で与えられる。

$$\dot{a}(0) = a(0) \bar{G} (k^2/\beta) f_b(\alpha/d) (C/2)^2 (kd)^2 (F_1 - F)$$

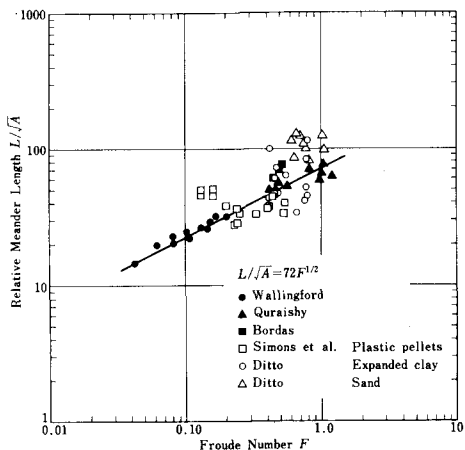
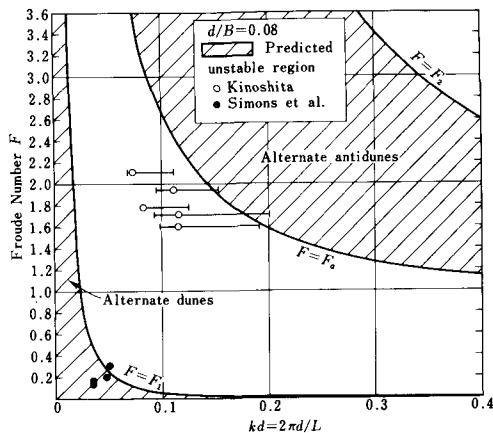


图-6.



四 - 5.

明らかに, $\dot{a}(0) : \max$ とあるものが卓紙の長さとなる。と $z \rightarrow \infty$ $\dot{a}(0)$ は $F = F_a + 0$ $z \rightarrow \infty$ となるから, 蛇行反動堆の卓紙の長さ $F = F_a$, 可なり, $F^2 = (\beta d \tanh \beta d) / (Ed)^2 \dots (27)$ と与えられる。

一方、蛇行領域の発生領域内で $\partial \dot{\alpha}(0)/\partial(Rd) = 0$ の解を求めたのであが、その解は Rd について explicit な形で与うことは困難である。しかし $\dot{\alpha}(0)$ は $(Rd)^4$ をもつから近似的には $\dot{\alpha}(0)$ の max. は発生領域の右端で現われたと考えられる。したがって、単純波長は $F = F_1$ と与えられるから $L/\sqrt{Bd} = CF^{1/2} \dots (28)$ となる。