

(財) 電力中央研究所 正員 白砂 孝夫

1. 緒言

与えられた河床条件、水理条件のもとにどのような河床浸が形成されるかという問題は移動床水理の基本課題の一つである。河床浸の形成機構に關する従来の解析的研究は、河床面に与えられた微小起伏の安定、不安定性と流れの運動方程式、流砂量¹⁾、河床変動式を用いて検討しようとするものが主で、与えられた浸長の微小起伏が存在し得る水理条件の範囲を与えろの²⁾にのみりて成果が得られている。しかし、この方法では微小起伏が河床面に与えられたものとして取扱われており、それが水流の如きような作用によって生じたかは説明されておらず、この点について、水理条件を与えても発生する初期起伏は一義的に決定される。上述の成果を補完するためには、初期起伏の発生機構の解明が必要と思われる。平坦河床に初期起伏が発生するとは、流れの何らかの作用により河床の流れ方向の流砂量³⁾が変動し、堆積、浸堀が生じる必要がある。この要因には種々考えられるが⁴⁾、流れの乱れ速度がその主なものと考えられる。本報告はこの観点から、二次元水路における河床の初期起伏の発生と流れの乱れ速度との関係を検討してみるものである。

2. 流砂量変動と河床高変動

流れ方向に流砂量が増大しているところでは浸堀が、減少しているところでは堆積が生じ、その結果河床高は変動する。この関係を表わす河床変動式はつぎのように表わされている。

$$\frac{\partial g(x, \delta)}{\partial \delta} + \frac{\partial f(x, \delta)}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

ここで、 $g(x, \delta)$ 、 $f(x, \delta)$ はそれぞれ、点 x 、時刻 δ における河床高および流砂量である。

点 x における t 時間の河床高変動 $\eta(x, t)$ は(1)式で時間で積分してつぎのように得られる。

$$\eta(x, t) = - \int_0^t \frac{\partial f(x, \delta)}{\partial x} d\delta = - \int_0^t \frac{\partial f'(x, \delta)}{\partial x} d\delta \quad (2)$$

ここで、 $f'(x, \delta)$ は $f(x, \delta)$ の平均流砂量⁵⁾の⁶⁾変動である。初期河床が平坦な場合、 $\eta(x, t)$ は t 時間後の平均河床面からの河床高である。同様に、点 $(x+\beta)$ における t 時間の河床高変動 $\eta(x+\beta, t)$ は

$$\eta(x+\beta, t) = - \int_0^t \frac{\partial f'(x+\beta, \gamma)}{\partial x} d\gamma \quad (3)$$

河床高変動の流れ方向の空間微分を知りたため(2)、(3)両式を用いて空間 L の t 時間の河床高変動の空間相関関数 $R_\eta(\beta, t)$ を求めればつぎのようになる。

$$\begin{aligned} R_\eta(\beta, t) &= \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} \eta(x, t) \eta(x+\beta, t) dx = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} dx \int_0^t \frac{\partial f'(x, \delta)}{\partial x} d\delta \int_0^t \frac{\partial f'(x+\beta, \gamma)}{\partial x} d\gamma \\ &= - \int_0^t d\delta \int_0^t \frac{d^2 R_f(\beta, \delta - \gamma)}{d\beta^2} d\gamma \end{aligned} \quad (4)$$

ニニは、 $R_4(\xi, \delta-Y)$ は流砂量変動の時空間相関関数であり、 ξ は流れ方向のずれ距離、 $(\delta-Y)$ は時間ずれを表わしている。(4)式は、 δ 時間内の河床高変動の空間相関関数と流れ方向の流砂量の変動の空間相関関数との関係を表わしているものであるが、これによれば、河床高変動の流砂方向の空間規模と流砂量変動の空間規模との関係が得られ、河床高変動が流れ方向に空間規模を持つためには、流砂方向の流砂量変動が時空間相関を持つ、その空間2階微分が存在する必要があることを示している。

3. 河床高変動と乱れ速度

さて、一様水路でかつ平坦な河床上の流れにおいて、二のように流れ方向の流砂量に変動を与える流れの作用力の主なものには流れの乱れ速度であろう。ここでは流れの乱れ速度と河床高変動との関係はどうかを知るには流れと流砂量との間の関係がわからなければならぬが、今のところ二れりとの関係は明確ではない。ニニでは、流速と流砂量との関係を二つのように近似して検討する。

点 x 、時刻 δ における流れ方向の見かけの体積流砂量 $q(x, \delta)$ は河床近傍の流れ方向の流速 $u(x, \delta)$ の S 時間平均の n 乗に比例するものと仮定する。すなわち、

$$q(x, \delta) = \bar{q} + q'(x, \delta) = m \left\{ \int_{\delta-\frac{S}{2}}^{\delta+\frac{S}{2}} u(x, \alpha) d\alpha \right\}^n = m \left[\bar{u} + \frac{1}{S} \int_{\delta-\frac{S}{2}}^{\delta+\frac{S}{2}} u'(x, \alpha) d\alpha \right]^n \quad (5)$$

ニニは、 m は比例常数、 $\bar{u}$ は平均量、 $u'(x, \alpha)$ 、 $q'(x, \delta)$ はそれぞれの量の平均量 $\bar{u}$ 、 $\bar{q}$ からの変動量を表わしている。また、流速の S 時間平均とこれからは、砂粒子の運動が流速に完全に追いつくのでは無くその前後の平均的なものに関係があるのではないかと考えられている。すなわち、 $S \rightarrow 0$ とすれば砂粒子の運動が流速に完全に追いつくことを意味する。さて、(5)式の n は一般に4程度と考えられ、流れの乱れ速度 u' は平均流速 $\bar{u}$ に比べて小さいので、(5)式の u' の2乗以上の項は小さいものと無視すれば流砂量変動 $q(x, \delta)$ は近似的に乱れ速度と一次式的な関係ととして二つのように表わされる。

$$q'(x, \delta) = \frac{m \bar{u}^{n-1}}{S} \int_{\delta-\frac{S}{2}}^{\delta+\frac{S}{2}} u'(x, \alpha) d\alpha \quad (6)$$

(6)式を(2)式に代入すれば、点 x における δ 時間内の乱れ速度による河床高変動は

$$\eta(x, t) = -\frac{m \bar{u}^{n-1}}{S} \int_0^t d\delta \int_{\delta-\frac{S}{2}}^{\delta+\frac{S}{2}} \frac{\partial u'(x, \alpha)}{\partial x} d\alpha \quad (7)$$

と得られる。同様にして点 $(x+\xi)$ における河床高変動は二つのようにする。

$$\eta(x+\xi, t) = -\frac{m \bar{u}^{n-1}}{S} \int_0^t d\delta \int_{\delta-\frac{S}{2}}^{\delta+\frac{S}{2}} \frac{\partial u'(x+\xi, \beta)}{\partial x} d\beta \quad (8)$$

の、(8)式より、 δ 時間内の河床高変動の空間相関関数 $R_4(\xi)$ は二つのように得られる。

$$\begin{aligned} R_4(\xi) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \eta(x, t) \eta(x+\xi, t) dt = \frac{m^2 \bar{u}^{2n-2}}{S^2} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} dx \int_0^t d\delta \int_{\delta-\frac{S}{2}}^{\delta+\frac{S}{2}} \frac{\partial u'(x, \alpha)}{\partial x} d\alpha \int_0^t d\delta' \int_{\delta'-\frac{S}{2}}^{\delta'+\frac{S}{2}} \frac{\partial u'(x+\xi, \beta)}{\partial x} d\beta \\ &= -\frac{m^2 \bar{u}^{2n-2}}{S^2} \int_0^t d\delta \int_0^t d\delta' \int_{\delta-\frac{S}{2}}^{\delta+\frac{S}{2}} d\alpha \int_{\delta'-\frac{S}{2}}^{\delta'+\frac{S}{2}} \frac{d^2 R_u(\xi, \alpha-\beta)}{d\xi^2} d\beta \quad (S \neq 0) \quad (9) \end{aligned}$$

$$= -\pi^2 \bar{u}^{2n-2} \int_0^t \int_0^t \frac{d^2 R_u(\xi, \delta - \gamma)}{\lambda \xi^2} d\gamma \quad (S=0) \quad (10)$$

(10)と(9)に代入すると g' と u' に関して相似の関係であるが、これは (6) 式によつて g' と u' が一次的関係に近似したためである。したがつて (10) 式より河床高変動が流れ方向に空間的規模を持つたは、流れ方向の乱れ速度が時空間相関を持つ、その空間二階微分が存在する必要があることを示している。

つぎに、乱れ速度の空間規模と乱れ速度の作用によつて生じた河床高変動の分散と空間規模とがどのような関係にあるかを調べてみる。

まず、乱れ速度では無く、つぎのように波速が U 、波長が $2\pi/k$ 、位相が ε の余弦波で表わされる周期的な変動速度を考える。

$$u'(x, t) = a \cos k(x - Ut + \varepsilon) \quad (11), \quad u'(x+\xi, p) = a \cos k(x+\xi - Up + \varepsilon) \quad (12)$$

(11)式を用いて $S \rightarrow 0$ の場合の $\gamma(x, t)$ に (11) 式により、(12) 式を用いて変動速度の時空間相関 $R_u(\xi, \alpha - \beta)$ および $S \rightarrow 0$ の場合の $R_\eta(\xi)$ を (10) 式より求めるとそれぞれつぎのようになる。

$$\gamma(x, t) = -(m\bar{u}^{n-1}/kU) \{ \cos k(x - Ut + \varepsilon) - \cos k(x + \varepsilon) \} \quad (13)$$

$$R_u(\xi, \alpha - \beta) = \frac{1}{2} a^2 \cos k\{\xi - U(\alpha - \beta)\} \quad (14)$$

$$R_\eta(\xi) = 2m^2 a^2 \bar{u}^{2n-2} \sin^2 \frac{kU\xi}{2} \cos k\xi \quad (15)$$

(14) 式より、流速変動の波長は $2\pi/k$ 、(15) 式より大時間の河床高変動の波長は $\pi m^2 k U \xi / 2$ が 0 でない限りやはり $2\pi/k$ であり、流速変動と河床高変動の波長は一致する。したがて、 $R_\eta(\xi)$ には、 $\sin^2 k U \xi / 2$ が係数としてつかつていて、これは $\omega = 2\pi/kU$ にと周期的に ± 1 の値を變動する。したがつて (15) 式より $S=0$ とある場合の河床高変動の分散も周期的に變動し、周期的に平坦河床が生じることを示している。(13) 式より波高 $\eta(x, t)$ はある瞬間をとらえれば流れ方向に周期的に變動し、ある点をとらえれば時間的に周期運動しているが、その運動はもはや単純な波動運動では無くなっている。

つぎに乱れ速度の場合にフリエールを考える。この場合、乱れ速度の時空間相関係数 $R_u(\xi, \alpha - \beta)$ として乱流中の eddy が大きな eddy から小さな eddy にエネルギーを伝へるから平均流速 $U/2$ (前述の U に相当) によつて流される時に一般に観測されるつぎのような形を仮定する。

$$R_u(\xi, \alpha - \beta) = \exp\left(-\frac{\xi^2}{L^2}\right) \exp\left[-\frac{\{(\alpha - \beta) - a\xi\}^2}{t_*^2}\right] \quad (16)$$

(16) 式よりテイラー・カルマン相関係数 $R_T(\xi)$ およびオイラー相関係数 $R_E(t)$ はそれぞれ

$$R_T(\xi) = \exp\left(-\frac{L^2 + a^2 L^2}{L^2 t_*^2} \xi^2\right) \quad (17) \quad R_E(t) = \exp\left(-\frac{t}{t_*}\right)^2 \quad (18)$$

と表わせ、乱れ速度の spatial integral scale λ および integral time scale T は (16) 式より、 L との関係はつぎのようになる。

$$\lambda = \int_0^\infty R_T(\xi) d\xi = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{L^2 t_*^2}{L^2 + a^2 L^2}} \pi \quad (19) \quad T = \int_0^\infty R_E(t) dt = \frac{1}{2} \sqrt{t_*} \quad (20)$$

(16) 式を (10) 式に代入して解析する始めにここ、平均化時間 S の影響を考える。図-1 は平均化時間

S が大時分の河床高変動の分散 $R_q(0)$ および相関係数に与える影響を調べたものでいずれも $al = 1.0$ なるおろし流速速度 $\frac{1}{\alpha} = l$ なる場合である。分散については横軸に S と縦軸に各 S の分散と $S=0$ の場合の分散の比を示してある。これによれば S が大

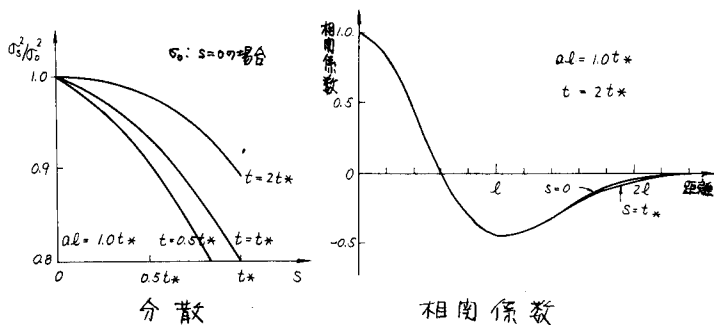


図-1 平均化時間 S が与える影響

くまるとつれて分散は小さく表われるが経過時間 t が大きくなるにつれてその影響はうすれてくることがわかる。これは S が一種のフィルター効果であり、高周波の乱れ速度を遮蔽する効果があるため、経過時間が大きくなると高周波の乱れ速度の成分が河床変動全般に占める割合が小さくなることを意味している。このことは、相関係数についても言えることから、平均化時間 S の影響は経過時間がある程度大きくなれば本質的なものではなくなると思われるので以下の議論は砂粒子の運動が流速と完全に追いつく $S=0$ の場合について行なうことにする。

図-2 は乱れ速度による河床高変動の分散の時間変化を示したもので、 $t = 15$ なるおける分散が 1 になるようにしてある。これによれば、乱れ速度によって平坦な河床に生じた起伏は時間とともに増大していくことが示されている。

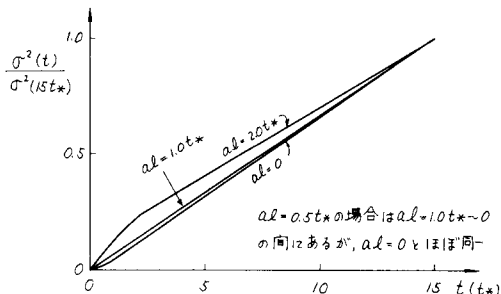


図-2 河床高変動の分散の時間変化 ($S=0$)

乱れ速度の空間規模と河床の起伏の空間規模がどのような対応関係にあるのかを相関係数によって示したのが図-3 である。これは $al = 2.0$ なる場合のみが図示されているが、 $al = 0$, $al = 0.5$, $al = 1.0$ なる各場合についても、河床の起伏の平均波長と乱れ速度の空間規模との関係を調べたものが表-1 である。これらによれば、乱れ速度によって生じた河床の起伏の平均波長は $al = 0$ の場合を除き時間とともに長くなり、いずれの場合も乱れ速度の spatial integral scale より大きいことがわかる。

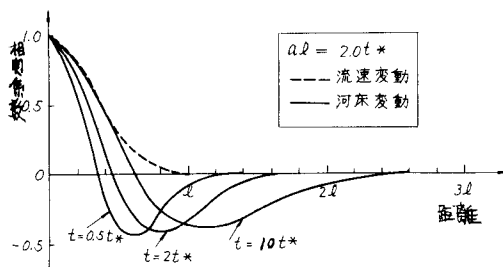


図-3 相関係数の時間変化

以上、流れの乱れ速度の作用によって平坦な河床に起伏が発生する可能性が論理的に示されたものと考えられる。しかし、この初期起伏がどのようにして安定な河床波へと生長するかは未解明である。初期起伏の発生の実験的検証も含めて今後の課題としたい。

al	0	0.5	1.0	2.0
乱れ速度の spatial integral scale λ	0.89 l	0.80 l	0.62 l	0.39 l
河床起伏の平均波長 L	$t = 0.5t^*$	2.46 l	2.20 l	1.80 l
	$t = 2t^*$	2.46 l	2.40 l	2.20 l
	$t = 10t^*$	2.46 l	2.46 l	2.40 l

表-1 乱れ速度の λ と河床起伏の平均波長 L