

神戸大学工学部

正員 松梨 順一郎

日本水道コンサルタントKK

正員 青藤 紀明

神戸大学大学院

学員 川口 恵司

I はじめに 従来、流れまたは波による流砂の現象は、一般にある種の連続運動とみなされ、流れによる随伴的連続現象として、現象の基礎方程式を力学的に設定し、それを解析的に解くことにより現象を把握する方向で問題がとられてきた。しかし、ここで問題にする流砂現象などは、本質的には不連続な離散的確率現象である。本研究ではこれらのことに注目して、すなわち、それらを stochastic な現象としてとられ、それらの確率モデルを設定することと目標としている。その第一歩として、従来から得られている二つの確率モデルにモンテカルロ法を適用して、数値実験を行い、現象と数値的に再現して、それらのモデルの適合性を検定した。さらに、そのことにより新しい一連の情報とえたのでその大要とる。

II 従来の確率モデルの要約

流砂現象への確率論の導入は 1950 年の H.A. Einstein の研究以来、多くの研究者によって注目されてきた。そして実験技術の開発とあいまつて、従来のオイラー的研究手法に加えて、トレーサーの追跡などにみられるように、ラグランジエ的研究方法によつても研究が進められてきている。ここでは Hubbell, Sayre の研究²⁾、その中に示された矢野、土屋、道上の研究成果¹⁾とを、次第への導入とする。

まづ、流れによつて河床砂が掃流されている場を想定しよう。個々の砂粒子は転動、跳躍、滑動、休止などの運動過程を繰返してあり、特定の砂粒子の運動を追跡して、一般に図-1 のようなモデルを設定されている。すなわち砂粒子は転動、跳躍、滑動などのいわゆる移動状態と、静止するのを休止状態という二つの状態の交互的繰返しとみるわけである。原点から出発した粒子は OA (静止)、AB (移動)、BC (静止)、……の経路をとる。一方、これを (OA, AB) とまとめて一事故、一ステップとみると、これの繰返しとみることもできる。一つの砂粒子が原点から出発するとして、区間 (0, x) の間で n 回の事故が発生する確率 $P_n(x)$ 、および n 回の事故が発生したとして、粒子が微小区間 $(x, x+dx)$ に存在する条件確率 $f(x|n)dx$ は、それぞれ

$$P_n(x) = \left(\frac{1}{n!}\right) (\lambda_1 x)^n e^{-\lambda_1 x}, \quad (n=0, 1, 2, \dots) \quad (1)$$

$$f(x|n)dx = \frac{1}{\Gamma(n)} \lambda_1 (\lambda_1 x)^{n-1} e^{-\lambda_1 x} dx \quad (2)$$

となる。 $\Gamma(n)$ はガンマ関数である。特別の場合として、

$$P_x(0) = e^{-\lambda_1 x}, \quad f(x|1)dx = \lambda_1 e^{-\lambda_1 x} dx \quad (3), (4)$$

および、n ステップで流下する平均移動距離は、

$$\int_0^{\infty} x f(x|n) dx = \frac{n}{\lambda_1} \quad (5)$$

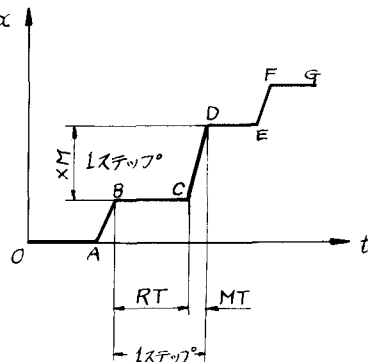


図-1

つぎに時間空間モデルについて、同様の取り扱いにより、次のように対応する諸関係をうる。

$$P_t(n) = \left(\frac{1}{n!}\right) (\lambda_2 t)^n e^{-\lambda_2 t}, \quad (n=0, 1, 2, \dots) \quad (1)'$$

$$f(t|n) dt = \left(\frac{1}{n!}\right) \lambda_2 (\lambda_2 t)^{n-1} e^{-\lambda_2 t} dt \quad (2)'$$

$$P_t(0) = e^{-\lambda_2 t} \quad (3)'$$

$$f(t|1) dt = \lambda_2 e^{-\lambda_2 t} dt \quad (4)'$$

$$\int_0^\infty t f(t|n) dt = \frac{n}{\lambda_2} \quad (5)'$$

また、時刻 t において、砂粒子が微小区間 $(x, x+dx)$ に存在する確率 $f_t(x) dx$ 、平均移動距離 $\bar{x}$ 、および分散 σ^2 とし、次の関係をうる。

$$f_t(x) dx = \lambda_1 \left(\frac{\lambda_2 t}{\lambda_1 x}\right)^{1/2} e^{-(\lambda_1 x + \lambda_2 t)} I_1(2\sqrt{\lambda_1 x \lambda_2 t}) dx \quad (6)$$

$$\bar{x} = \int_0^\infty x f_t(x) dx = \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right) t \quad (7)$$

$$\sigma^2 = \int_0^\infty (x - \bar{x})^2 f_t(x) dx = \frac{2\lambda_2 t}{\lambda_1^2} \quad (8)$$

III モンテカルロ法による現象のシミュレーション

前項の理論的確率モデルを検証するにあつて Hubbell らはアイソトープとトレーサーとして野外および室内実験を実施しており、土屋らは室内水路実験によつてゐる。ここでは乱数による数値実験によつて、これらのモデルを検証した。

式(4) および (4)' によると、トレーサー粒子が1ステップ移動する距離、または休止の時間は場の偶然性に支配されるが、大数的には指数分布に従うことを示している。この種の流砂現象の数値実験では、まずこの関係の検証から出発しなされるべきでない。この場合、 λ_1 , λ_2 などの確率常数は数値実験のこの段階では決定できないので、表-1の実験データと使用した。Hubbell らによると、 $1/\lambda_1 = 10.80 \text{ m}$, $1/\lambda_2 = 12 \text{ hr}$ 、土屋らによると、 $1/\lambda_1 = 58.8 \text{ cm}$, $1/\lambda_2 = 69.5 \text{ sec}$ である。確率密度関数式(4) および (4)' の確率変数 x , t は変換式、 $U = \int_0^x f(\xi) d\xi$ により、区間 $(0, 1)$ の一様乱数 U によつて、次のように与えられる。³⁾

$$x = -\left(\frac{1}{\lambda_1}\right) \log_e (1-U), \quad t = -\left(\frac{1}{\lambda_2}\right) \log_e (1-U) \quad (9)$$

トレーサー粒子 300 ID を原点から出発させ、式(9)によつて、 x_i , t_i ($i=1, 2, \dots, 300$) を計算し、ヒストグラムで示すと図-2 および 図-3 とする。実際は式(4) および (4)' と示す。300 ID 程度のデータによると、これらの図に示される程度の対応が得られることがわかる。

表-1

	Hubbell, Sayre	矢野, 土屋, 道上
d(cm)	0.029	0.35
h(cm)	75.0	3.56
I (勾配)	0.083×10^{-2}	1.01×10^{-2}
u_* (cm/s)		5.94
σ/ρ , 砂比重		2.65
$(1/\lambda_1)$ cm	$1080 = 10.80 \text{ m}$	58.8
$(1/\lambda_2)$ sec	$43200 = 12 \text{ hr}$	69.5
B(cm), 水路幅	1500	20
regime	dunes bed	transition or flat bed
condition	field exp.	labo. exp.

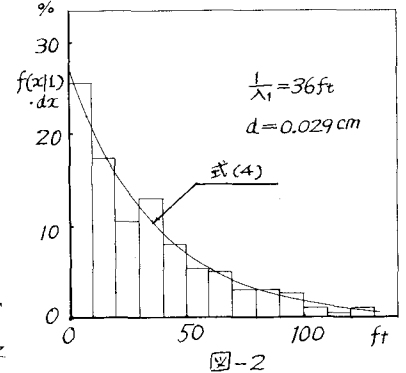


図-2

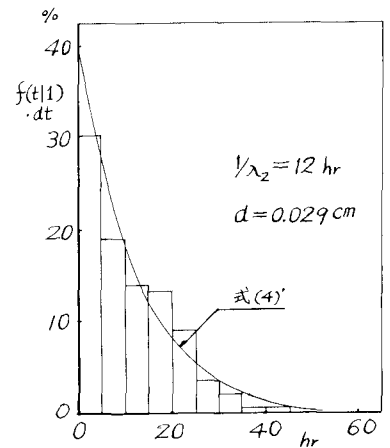
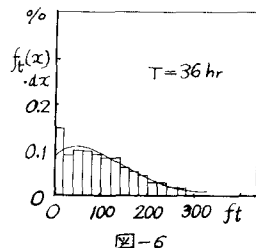
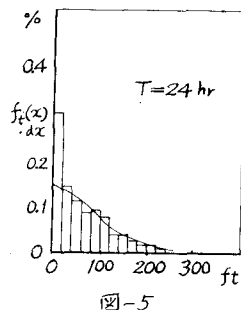
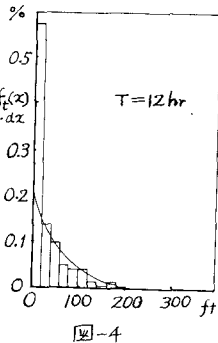
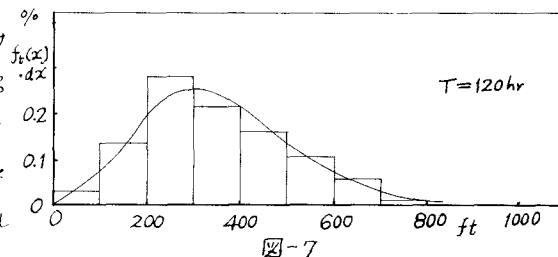


図-3

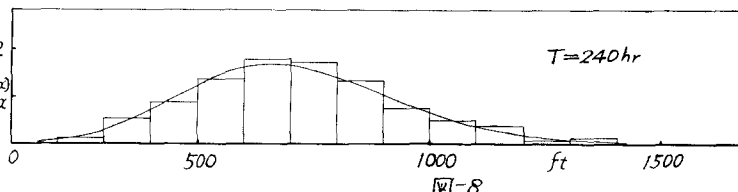
つどに厚さから500個のトレーサ粒子と出発させ、ある任意時刻Tにおける各粒子の位置xに関するヒストグラムと $f_t(x) \cdot dx$ を得て、これを式(6)の $f_t(x) \cdot dx$ と比較した。トレーサ粒子が任意時刻Tに達するまでにステップと何回移動するかは問題ではない。各ステップが式(9)の形式に対応して決定され、経過時間 Δt



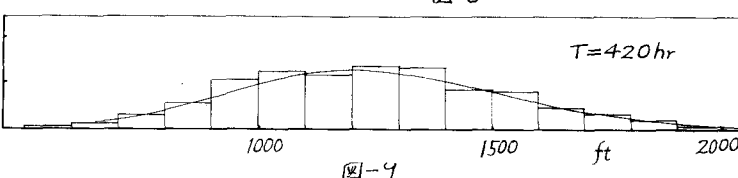
がTに到達すると、それまでの平均移動距離 Δx が決定される。このようにして、 $T=12, 24, 36, 120, 240, 420$ hrにおけるヒストグラムと平均を $\Delta x=20$ ft, $\Delta x=100$ ftとした。これらによると、Tの小さい図-4, 5, 6では式(6)と一致しない。しかし、Tが増大するとともに、とくに図-7, 8, 9の状態ではよく一致しており、確率密度曲線のモードは時間とともに下流に移行していく。図-7のデータを用い、 X^2 検定を適用すると、有意水準10%で実験結果が理論式によく適合していることがわかった。式(6)は図-4, 5, 6に示されるようにT=12の小さい状態、すなわちステップ回数



数の小さい $n=0$ 付近で両者が一致しない。式(3)は任意時刻Tにおいて、厚さに残留している粒子の相対度数 n を与える。結果によると、この式の適合性はよいので、式(6)の誘導過程で、 $n=0$ のときの取り扱いに難点があるように思われる。



III 移動時間に関する確率密度関数
トレーサ粒子の1ステップと考える場合、従来研究では、図-1に示す休止時間RTと移動時間MTとを区別せずに、その合計時間を1ステップに要する時間としている。しかし、数値実験によるシミュレーションでは、粒子の時間に関する移動と休止時間と移動時間に分けて考えるのがより実感的であり、ここでは、そのように取り扱いを試みる。



1ステップに要する時間として、図-10の休止時間 t_1 のみと考える場合、および休止時間 t_1 と移動時間 t_3 の和 t_2 と考える場合のそれぞれについて、式(4)に対応する関数式は、次の二つの式で与えられる。

$$f_1(t_1|1)dt_1 = \lambda_1^* e^{-\lambda_1^* t_1} dt_1 \quad (10)$$

$$f_2(t_2|1)dt_2 = \lambda_2 e^{-\lambda_2 t_2} dt_2 \quad (11)$$

したがって、1ステップで経過する時間は、式(9)と同様、一様乱数 U により、

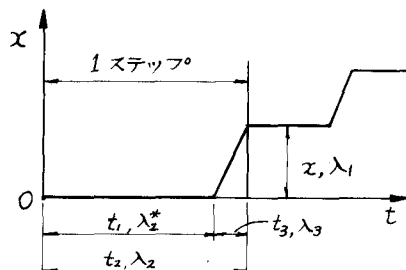


図-10

$$t_1 = -\left(\frac{1}{\lambda_2^*}\right) \log_e(1-U), \quad t_2 = -\left(\frac{1}{\lambda_2}\right) \log_e(1-U) \quad (12)$$

図-10より粒子の実際の移動時間は、 $t_3 = t_2 - t_1$ 、かつ、式(12)より

$$t_3 = -\left(\frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_2^*}\right) \log_e(1-U) \quad (13)$$

式(12)、(13)の類似性から、移動時間の確率密度関数は、

$$f_3(t|1) = \frac{\lambda_2 \lambda_2^*}{(\lambda_2^* - \lambda_2)} \exp\left\{-\left(\frac{\lambda_2 \lambda_2^*}{\lambda_2^* - \lambda_2}\right)t\right\} \quad (14)$$

となり、平均移動時間 $\bar{t}_3$ は次式で与えられる。

$$\bar{t}_3 = \int_0^\infty t f_3(t|1) dt = \frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_2^*} \quad (15)$$

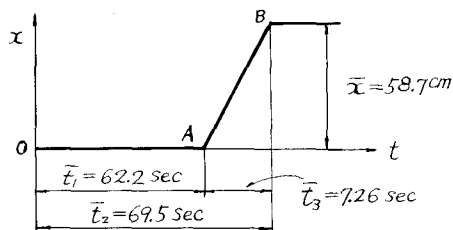


図-11

式(14)が確定するためには、確率密度関数 λ_2, λ_2^* と決定する必要がある。 λ_2 は従来の研究から既知であるとして、 λ_2^* は次のように決定される。いま、トレーサー粒子の1ステツフの平均移動距離は式(15)で $n=1$ と置き、 $\bar{x} = 1/\lambda_1$ となる。よって粒子が移動するときの平均速度は次式で与えられる。

$$\bar{u}_g = \frac{\bar{x}}{\bar{t}_3} = \frac{1/\lambda_1}{(1/\lambda_2 - 1/\lambda_2^*)} \quad (15)$$

→ A.A. Kalinske の理論によると、

$$\bar{u}_g = \int_{u_c}^\infty (u - u_c) \varphi(u) du \quad (16)$$

→ には、 u は砂粒近傍の流

速、 u_c は砂粒の始動時の流速、 $\varphi(u)$ は u に因する確率密度関数で、正規分布、 $\varphi(u) = (1/\sqrt{2\pi}\sigma^2) \exp\{- (u - \bar{u})^2 / 2\sigma^2\}$ 、 σ は標準偏差、で与えられる。表-1に示す土屋らのdataを使用すると、 $u_c^2 / (\lambda_1 \rho - 1) g d = 0.05$ より $u_c = 5.32 \text{ cm/s}$ 、対数法則によると、 $u_c = u_* [8.5 + 5.75 \log_{10}(y/d)]$ 、 $y_d = 45.22 \text{ cm/s}$ 、また、 $\bar{u} = u_* [8.5 + 5.75 \log_{10}(y/d)]$ 、 $y_d = 50.49 \text{ cm/s}$ 、 $\sigma = 0.25 \bar{u} = 12.62 \text{ cm/s}$ 、これを式(16)に代入すると、 $\bar{u}_g = 8.1 \text{ cm/s}$ となる。したがって、式(15)で、 $1/\lambda_1 = 58.8 \text{ cm}$ 、 $1/\lambda_2 = 69.5 \text{ sec}$ とあくと、 $1/\lambda_2^* = 62.2 \text{ sec}$ となる。よって式(14)と $f_3(t|1) = \lambda_3 e^{-\lambda_3 t}$ とあくと、 $1/\lambda_3 = 7.26 \text{ sec}$ となる。図-11は1ステツフと各パラメータの平均値で示した模式図である。表-2はこれらの結果を用いて、原委より500個の粒子を $N=1, 3, 5, \dots$ ステツフとせ、そのときの1個あたりの平均総休止時間RT、平均総移動時間MT、平均位置時間(RT+MT)、および平均総移動距離XMと数値実験によって求めた結果、 $S(N)$ であり、 $T(N)$ は理論値である。(図-1参照) 移動時間は位置時間の10%程度であり安否右オーダーであると与えられる。

以上は数値実験の結果であるが、これと平行して水路実験を実施している。その結果については巻末に報告

VI 参考文献

- 1) 矢野陽正、土屋義人、道上正規、"砂れきの流送機構の確率過程としての特性について"、京都大学防災研年報、第10号B、昭和43年 PP 61~73、2) Hubbell, D.W. and Sayre, W.W. "Transport and Dispersion of Labeled Bed Material, North Loup River, Nebraska, U.S. Geological Survey, Water Resources Division, 1963, PP 60~87、3) 応用水理学、下II、石原邦典編、丸善 P.33、4) Water, H. Graf, Hydraulics of Sediment Transport, McGRAW-HILL, P.99