II-52　　内部波の安定性に関する研究

東京工業大学工学部　正会員　椎貝博美
東京工業大学工学部　正会員　沢本正樹
東京工業大学大学院　学生員　○加藤一正

1　**概説**：密度差のある混合しない2流体間の境界面の安定性を実験的に調べた。このような流体系を水槽ごと振動させると、外力に対応する内部波が発生すると予想される。このような波は、波を微小振幅の線型系と考えて説明しうる。ところが、実際にこの実験を、おこなうと、その予想とは非常に異なる現象が観察される。すなわち、いわゆる内部波(1次波)だけの場合と、その波面上に内部波の波長に比べて、すこぶる短い波長の波が、周期的に、ある何らかの規則に支配されて乗ってくる場合(2次波)と、内部波がねじれてくる場合(cross wave)[1]と、さらに、2次波とcross waveが同時に現われてくる場合の、4つの型があることである。そして、それらに関する論文が皆無であったので、ここでは特に2次波について、その非線型方程式の近似解法と、実験を試みた。そして、次のことが、明らかとなった。微小振幅波理論による1次波の線型方程式の解は、共振点以外のところで、実験値と比較的よく合っている。さらに、2次波を非線型方程式で解くには、非線型項として速度項を重視しなければならない、なぜなら2次波の発生の直接的原因が、剪断流にあるということが、完全流体として整理したときに明らかとなったからである。

2　**理論的考察**：強制振動されている水槽の、中央に固定した座標系を用いる。そして、2層は、上下層とも同じ水深とする。すると、基礎方程式は、ラプラスの式であり、境界条件は、壁面で垂直速度が0、境界面で垂直速度が連続・圧力が連続（次の式）である。

$$z=\eta \text{で}\quad \rho_1\left(\frac{\partial\phi_1}{\partial t}-g\eta-\frac{1}{2}q_1^2-\Omega\right)=\rho_2\left(\frac{\partial\phi_2}{\partial t}-g\eta-\frac{1}{2}q_2^2-\Omega\right)$$

i)線型方程式 ----- 圧力の連続における速度項を無視すると、長さl_1の水槽内に、波長$2l_1$のStanding Waveが現われるときの解は、次のとうりである。

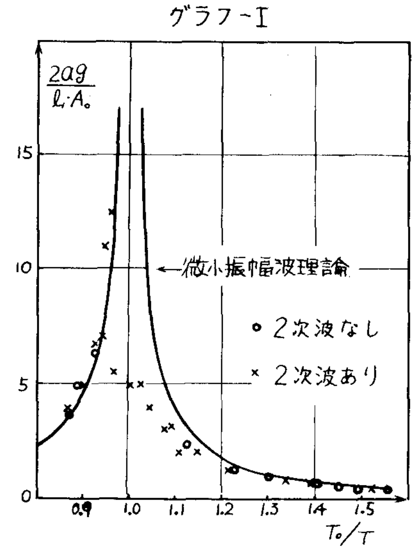
$$\eta=a\sin\frac{\pi}{l_1}x\cdot\sin\frac{2\pi}{T}t$$

$$\begin{cases}\phi_1=\dfrac{2l_1}{T}a\,\dfrac{\cosh\frac{\pi}{l_1}(-z+h)}{\sinh\frac{\pi}{l_1}h}\cdot\sin\frac{\pi}{l_1}x\cdot\cos\frac{2\pi}{T}t\\[2ex]\phi_2=-\dfrac{2l_1}{T}a\,\dfrac{\cosh\frac{\pi}{l_1}(+z+h)}{\sinh\frac{\pi}{l_1}h}\cdot\sin\frac{\pi}{l_1}x\cdot\cos\frac{2\pi}{T}t\end{cases}$$

$$a=\frac{4A_0}{\pi}\cdot\frac{\rho_2-\rho_1}{\rho_1+\rho_2}\left\{\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\coth\frac{\pi}{l_1}h-\frac{\pi}{l_1}g\frac{\rho_2-\rho_1}{\rho_1+\rho_2}\right\}^{-1}$$

共振周期：$T_0=2\pi\sqrt{\dfrac{\rho_1+\rho_2}{\rho_2-\rho_1}}\sqrt{\dfrac{l_1}{\pi g}\coth\frac{\pi}{l_1}h}$

グラフ-I



ii)非線型方程式 ----- 非線型項としては、速度項を入れる。そして、線型解を利用するため、$\bar{\phi}=$

$\phi + \phi'$, $\bar{\eta} = \eta + \eta'$とし、非線型方程式を、線型部分と、非線型部分とに分離し、さらに後者を線型化して解く。この場合、境界壁での条件は、この2次波が、高周波であることと、中央部分に限定していることを考えて無視する。

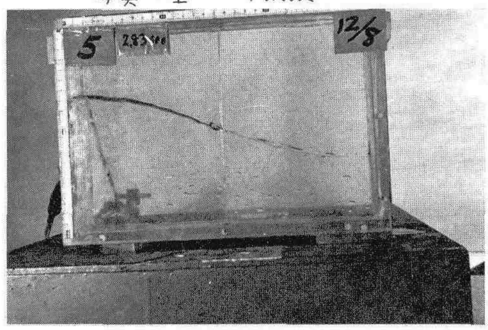
$$\eta' = b\sin(k_{11}x - \frac{n\pi}{T}t)\cos\frac{2\pi}{T}t + b\sin(k_{12}x - \frac{n\pi}{T}t)\cdot\cos\frac{2\pi}{T}t$$

とおくと、境界面での条件を満たすように、k_{11}・k_{12}を決定できる。そのとき、速度分布は、境界面で連続であるように仮定した。η'を2種の波の合成であると考えたのは、1種のときは、速度分布の連続を仮定しても解けないからである。又、2次波は、1次波に対し1/4周期ずれている。その結果は

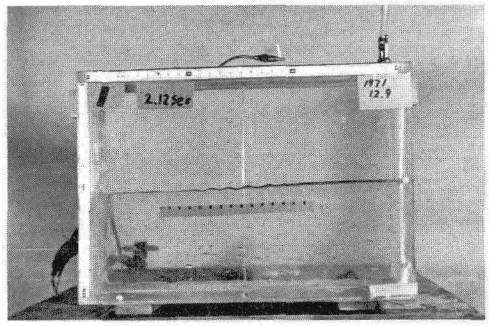
$$\eta' = 2b\sin\left\{\frac{\pi^2(n^2+4)}{gT^2}\cdot\frac{\rho_1+\rho_2}{\rho_2-\rho_1}x - \frac{n\pi}{T}t\right\}\cos\frac{4n\pi^2}{gT^2}\frac{\rho_1+\rho_2}{\rho_2-\rho_1}x\cdot\cos\frac{2\pi}{T}t$$

となる。ここでnの値($n = 0, -1, -3, -4, -6$, or $-3 < n < -1$ のある値)は、不定であるから もう1つ新しい方程式(例えば、エネルギーに関するもの)が必要となる。確かにエネルギーを最小とするnを決定することは、可能である。bは決定することが出来なかった。ここで、$n = -6$, とした場合、この波形が実際の現象に、ほとんど一致する。速度ポテンシャルは、これに対応したものが、求められる。

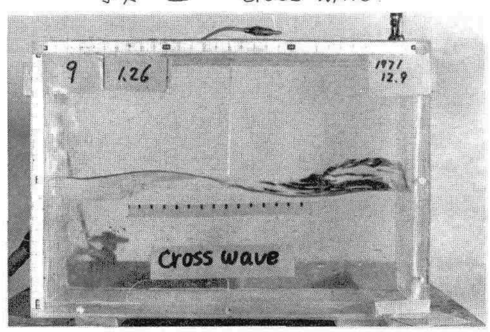
写真－Ⅰ　1次波



写真－Ⅱ　2次波



写真－Ⅲ　cross wave



3 実験：

プラスチック水槽(30×20×10 cm)に上・下層それぞれに10cmの厚さに、テレピン油(燈油)・水を入れて密閉し、水槽の最大辺に平行に強制振動した。測定は、強制振動周期・振幅，1次波高，2次波の有無をおこなった。その結果を整理すると、(グラフ－Ⅰ)共振点とずれたところでは、2次波の有無にかかわらず、微小振幅波理論と、1次波がよく合っている。また、共振点近くでは、すべて、2次波を含んでいる。さらに、微小振幅波理論で求めた、最大流速を上下層の流速とし、完全流体の安定限界と比較すると、非常によく一致した。[2] 以上の2つのことから考えても、非線型方程式を、非線型項として、速度項を重視し、微小振幅波理論を基礎にして解いた妥当性が認められる。

4 結論：

1次波に関しては、微小振幅波で近似して十分である。2次波は、上・下層の剪断流により発生するものであり、その2次波の形状は、エネルギー最小とする様に決定できうる。非線型項を入れることにより、速度分布が連続であると仮定しなければ解けなくなる。

2層流の混合は、内部波、特にこの2次波の砕波によって促進されるのではないかと思われる。

5 参考文献：

1) S. A. Thorpe ; J. F. M. 32-3, 1968　2) 嶋祐之「密度流論」水工学シリーズ 65-11