II-49　貯水池における密度流に関する一考察

大成建設 正員 ○ 鍵昌淳一
名古屋大学正員　西畑勇夫

1. まえがき

貯水池の持つ水理学的機能の1つに、上流から流入してきた微細粒子を沈殿、再浮上、そして移流させる調節作用がある。調節作用を明らかにする基本的第一歩として、まず貯水池内の水の流れを知らねばならない。

貯水池内の水は、貯水池内に浮遊している微細粒子の濁度差や水温差によって、密度が成層状態を示しているので、解析的には密度成層流体として取扱う必要がある。貯水池内の水が取水口に向かって流れるときの流線形状は、多くの因子に左右されることが予測される。

本研究では、現象を2次元流域内のポイントシンクに向かう流れとして解析し、流線形状が取水位置の高さと、密度で修正された流れのフルード数によって一意的に決定されることを示した。

2. 基礎理論

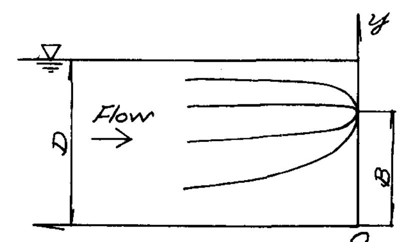


Fig 1

流れは2次元の定常、非粘性、非圧縮のポイントシンクに向かう成層流であるものとする。このとき Yih①は、運動方程式と非圧縮性を表わす式から、2次元流域内の密度成層流を表わす基礎方程式として次式を導いた。

$$\frac{\partial^2 \psi'}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \psi'}{\partial y^2}=\frac{1}{\rho_0}\frac{dH}{d\psi'}-\frac{g}{\rho_0}\frac{d\rho}{d\psi'} \qquad (1)$$

ここに、u, v：それぞれx, y方向の流速、ρ_0：基準密度（ここでは底密度をとる）ρ：流域内の密度、g：重力加速度、p：圧力とし、$u'=(\rho/\rho_0)^{1/2}u$,　$v'=(\rho/\rho_0)^{1/2}v$ をそれぞれ密度で修正した Yih の変換速度とすれば、ψ'は

$$u'=\frac{\partial \psi'}{\partial y}\quad ,\qquad v'=-\frac{\partial \psi'}{\partial x} \qquad (2)$$

で定義される流れ関数であり、Hは

$$H=p+\frac{\rho_0(u'^2+v'^2)}{2}+g\rho y \qquad (3)$$

で定義される流れの Bernoulli の関係式である。

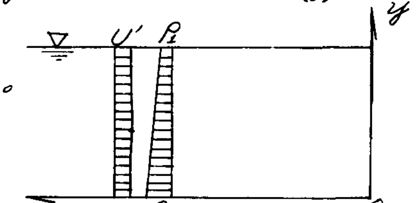


Fig 2

つぎに基礎方程式(1)を仮定ⓐ, ⓑを用いて線形化する。

ⓐ　ポイントシンクから十分上流の密度分布は直線分布とみなす。

$$\rho=\rho_0\left(1-\beta\frac{y}{D}\right),\quad \beta=\frac{\rho_0-\rho_1}{\rho_0} \qquad (4)$$

ここでρ_1は表面密度である。

ⓑ　ポイントシンクから十分上流では、密度で補正された流速が水深方向に一様であるとみなす。U'の符号はポイントシンクに向かう流れなので正である。

$$\psi'=U'y \qquad (5)$$

このとき(1)式の右辺の各項は

$$\frac{d\rho}{d\psi'} = -\frac{\beta\rho_0}{DU'}, \qquad \frac{dH}{d\psi'} = -\frac{g\beta\rho_0}{DU'^2}\cdot\psi' \qquad (6)$$

となり(1)式は無次元化された(7)式のように線形化される。

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial\eta^2}+F^{-2}\psi = F^{-2}\eta \qquad (7)$$

ここに $\xi=\frac{x}{D}$ $\eta=\frac{y}{D}$ $\psi=\frac{\psi'}{U'D}$ であり F は一種の密度によって修正されたフルード数を意味し次式で表わされる。

$$F=\frac{U'}{\sqrt{g\beta D}} \qquad (8)$$

(7)式を、つぎの境界条件①,②,③,④のもとで解くと(9)式を得る。但し $b=\frac{B}{D}$ である。

① $\xi=-\infty,\ 0\leq\eta\leq1,\ \psi=\eta$　② $-\infty\leq\xi\leq0,\ \eta=1,\ \psi=1$

③ $-\infty\leq\xi\leq0,\ \eta=0,\ \psi=0$　④ $\xi=0,\ \begin{cases} b<\eta\leq1 & \psi=1 \\ 0\leq\eta<b & \psi=0 \end{cases}$

$$\psi = \eta + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cos n\pi b\cdot\sin n\pi\eta\cdot\exp(n^2\pi^2-F^{-2})^{1/2}\xi \qquad (9)$$

(9)式を数値計算すると、流れは $b=0.5$ を境に上下対称形となり、$1\geq b\geq0.5$ のとき下層に渦が生じ、逆に $0.5\geq b\geq0$ のとき上層に生じることが判る。$F=\frac{1}{\pi}$ になると流れは、上下に完全に2分される。

このとき(9)式に $F=\frac{1}{\pi}$, $\xi=-\infty$ を代入すると

$$\psi = \eta + \cos\pi b\cdot\sin\pi\eta \qquad (10)$$

となり、流れの分離限界高さを $\eta=\eta_c$ とすれば、つぎの関係式が成り立つ。

$$\eta_c + \cos\pi b\cdot\sin\pi\eta_c = \begin{cases} 0.5\leq b\leq1, & 0 \\ 0\leq b\leq0.5, & 1 \end{cases} \qquad (11)$$

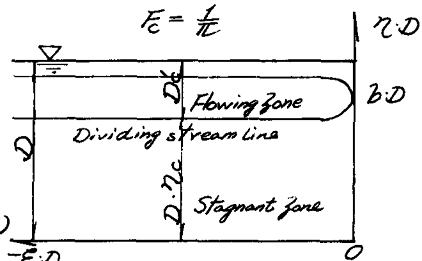


Fig 3

(11)式は流れの限界高さ η_c が取水高さ b によって決定されることを示している。流れが分離される限界の F は、全水深 D を用いて表わせば $F_c=\frac{1}{\pi}=0.318$ であるが、実際に流動している範囲は $D_c'=D(1-\eta_c)$ であるから、D の代りに D_c' を用いて F を計算し、これを F_c' とする。この F_c' は(11)式から判るように b の関数として与えられる。D' は流れが分離しているときの流れの巾である。

$$F_c' = \frac{U'}{\sqrt{g\beta D'}} = \frac{U'}{\sqrt{g\beta D(1-\eta_c)}} \qquad (12)$$

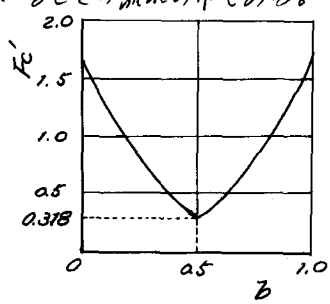
ここで、日野大西の実験[2]によると、流れが2分されて D' が除々に減少していっても、流れの修正されたフルード数は一定の値を示すことが判る。そこで、各 D' のときの F' を流れが分離されるときの F_c' に等しいとおけば

$$F' = \frac{U'}{\sqrt{g\beta D'}} = F_c' \qquad (13)$$

となり、また $(\rho/\rho_0)^{1/2}\fallingdotseq1$ なので $U'=Q/A$ を(13)式に代入すると、D' はつぎのように求まる。

$$D' = \frac{Q^2}{F_c'^2\cdot A^2\cdot g\cdot\beta} \qquad (14)$$

ここに Q は取水流量、A は貯水池の流積である。



Fig・4

参考文献

① C S Yih : Dynamics of non homogeneous fluid, Macmillan Comp 1965
② 日野, 大西 : 円筒型取水塔のスリットへの密度成層流. 土木学会論文集 1969