

II-42 密度噴流に於ける連行作用について

九州大学 工学部 正員 橋 東一郎

〃 大学院 学生員 〇小松 利光

まえがき

密度噴流の取扱いにおいては、連行係数が重要な役割を果たすわけであるが、従来、二次元水平噴流で Ellison & Turner の実験曲線が用いられる程度で、鉛直重力噴流、二次元水平噴流ともに連行現象に関する理論的検討は試みられていないように思う。ここでは以上二つの場合の連行係数について若干の考察を加えてみた。

二次元水平噴流

図-1 に示すように、potential core の消失した下流域を考え、表面流速、表面密度を U_s , ρ_s とする。

現象を規定する基礎式は、

$$\text{連続の式} \quad \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

$$\text{運動方程式} \quad U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau}{\partial y} \quad (2)$$

$$\text{拡散方程式} \quad \frac{\partial (\rho U)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho V)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (D_y \cdot \frac{\partial \rho}{\partial y}) \quad (3)$$

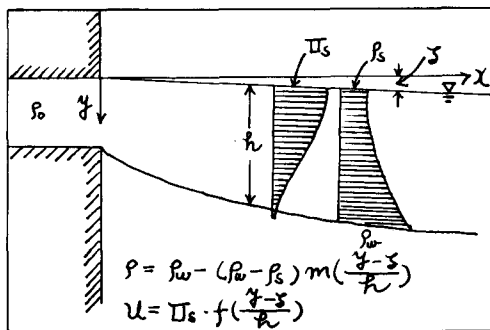


図-1

平均流のエネルギー方程式

$$\rho^2 = U^2 + V^2 \quad \frac{\partial}{\partial x} \left\{ U \left(\frac{P}{\rho} - g y + \frac{1}{2} \rho^2 \right) \right\} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ V \left(\frac{P}{\rho} - g y + \frac{1}{2} \rho^2 \right) \right\} = \frac{U}{\rho} \frac{\partial \tau}{\partial y} \quad (4)$$

圧力は静水圧分布とし、上層内では流速分布、密度欠損分布とともに相似性が成り立つものと仮定して、次式を用いる。

$$\rho = \rho_w - (\rho_w - \rho_s) m(\eta), \dots (5) \quad U = U_s f(\eta) \dots (6) \quad \eta = \frac{y-s}{h}$$

(1)(2)(3)(4)の各式と水表面から、上層境界($s+h$)まで積分をすると、若干の計算の後、

$$\frac{d}{dx} [\alpha h U_s] = -V \quad (7) \quad \text{ここで } V \text{ は上層境界における鉛直方向の流速}$$

$$\frac{d}{dx} [\gamma h U_s^2] = -\frac{d}{dx} (E_s g h^2) \lambda_c \quad (8) \quad E_s = (\rho_w - \rho_s) / \rho_w, \quad \alpha = \int_0^1 f d\eta$$

$$\frac{d}{dx} [E_s h U_s] = 0 \quad (9) \quad \gamma = \int_0^1 f^2 d\eta, \quad \delta = \int_0^1 f^3 d\eta$$

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{1}{2} \delta h U_s^3 \right] + \frac{d}{dx} [E_s g h^2 U_s \mu_c] = - \int_s^{s+h} \frac{\tau}{\rho} \frac{\partial U}{\partial y} dy \quad (10) \quad h: \text{上層水深}$$

ここで $\lambda_c = \int_0^1 m(\eta) d\eta - \left(\int_0^1 \eta d\eta \right) \left(\int_0^1 m(\eta) d\eta \right)$, $\mu_c = \int_0^1 f(\eta) d\eta \cdot \int_0^1 m(\eta) d\eta - \left(\int_0^1 f(\eta) \right) \left(\int_0^1 m(\eta) d\eta \right) d\eta$ を得る。次に乱れエネルギー $C^2 = \overline{u^2} + \overline{v^2} + \overline{w^2}$ 及び Reynolds 応力 $\overline{u'v'}$ の輸送方程式

$$\frac{D}{Dt} [C^2] = 2 \cdot \frac{\tau}{\rho} \frac{dU}{dy} - 2 \frac{g}{\rho} K_p \frac{d\rho}{dy} - \frac{10V}{\lambda^2} C^2 - \frac{d}{dx} (\overline{v' C^2}) - P' \quad (11)$$

$$\frac{D}{Dt} [\overline{u'v'}] = -\overline{v^2} \frac{dU}{dy} - \frac{g}{\rho} K_p \frac{d\rho}{dx} + \nu \{ \overline{u'v''v'} + \overline{v''v'u'} \} - \frac{d}{dy} \overline{v''(u'v')} - P'' \quad (12)$$

において、 $\tau/\rho = \frac{1}{3} C \cdot l \cdot \frac{dU}{dy}$, $K_p = \alpha \frac{1}{3} C l$ とし、 C 及び混合距離 l は近似的に y 方向には一様であるとする。圧力変動による乱れ及び Reynolds 応力生成の項 P' , P'' はともに微小として無視する。

また(12)式の dissipation の項は栗原教授より与えられている関係式 $\nu \{ \overline{u'v''v'} + \overline{v''v'u'} \} = -\frac{10\nu}{\lambda^2} \overline{u'v'}$

を用いる。混合距離 \$l\$ は上層水深 \$h\$ に比例するとして \$l = \beta_* h\$ とおくと (11) 及び (12) 式の水表面から境界 (\$h+l\$) までの積分は次の如くなる。

$$\frac{\alpha}{C\beta_*\Pi_s} \frac{d}{d\eta} [C^2 h \Pi_s] = \frac{2}{3} \delta_f - \frac{2}{3} \alpha_* \frac{E_s g h}{\Pi_s} - \frac{10V}{\beta_* \lambda^2 \Pi_s} g' h \quad (13) \quad \text{ここで } g' = \frac{C}{\Pi_s}$$

$$\alpha_1 \frac{d}{d\eta} [C \cdot l \cdot \Pi_s] = -C^2 \Pi_s - \frac{\alpha_2}{3} l^2 \frac{\Pi_s^3}{h^2} + \frac{40V C \cdot l}{\lambda^2} \cdot \Pi_s \quad (14) \quad \alpha_1 = \int_0^1 f \frac{df}{d\eta} d\eta$$

$$\alpha_2 = \int_0^1 \left(\frac{df}{d\eta}\right)^2 d\eta, \quad \delta_f = \int_0^1 \left(\frac{df}{d\eta}\right)^2 d\eta, \quad \lambda: \text{Taylor の micro scale}$$

次に (7) (8) (9) の関係を用いて、(10) 式の左辺が entrain 流速 (\$-V\$) を含む形に変形すると、若干の計算の後、次式が得られる。

$$-\frac{V}{\alpha \Pi_s} (\equiv E) = g' \cdot \frac{2}{3} \frac{\beta_*}{\delta} \delta_f \cdot \chi \left(\frac{1}{F^2} \right) \quad (15)$$

$$\text{ここに } \chi \left(\frac{1}{F^2} \right) = \frac{1}{\left\{ 1 + \frac{4}{F^2} \cdot \frac{\frac{3}{2} \frac{\lambda_c}{r} - \frac{\mu_c}{\delta} + \frac{1}{2} \frac{1}{F^2} \frac{\lambda_c}{r} \frac{\mu_c}{\delta} \right\}} \dots (16), \quad \frac{1}{F^2} = \frac{E_s g h}{\Pi_s^2}$$

次に (14) 式より (13) 式の Taylor の micro scale \$\lambda\$ を消去し、(9) 式及び (10) 式を用いて、\$g'\$ について整理すると

$$\left\{ \frac{1}{\beta_*} - (\alpha_1 + 4\alpha) \frac{2\beta_*}{3\delta} \delta_f \right\} g'^2 - \left\{ (\alpha_1 + 4\alpha) \frac{2\mu_c}{\delta} \frac{1}{F^2} \frac{\lambda_c}{2\lambda_c} \frac{1}{F^2} - 2\delta \right\} E g' + \left\{ \frac{8}{3} \alpha_* \beta_* \frac{1}{F^2} + \frac{1}{3} \alpha_2 \beta_* - \frac{8}{3} \beta_* \delta_f \right\} = 0 \quad (17)$$

従って、(15) 式及び (17) 式より、連行係数 \$E\$ は流速分布 \$f\$、密度分布 \$m\$ による係数を含みながら

$$1/F^2 = (\alpha^2/\theta) Ri \text{ に規定されていることがわかる。ここで } \theta = \int_0^1 m d\eta$$

(15), (17) で \$1/F^2 \to 0\$、すなわち Richardson 数 \$Ri \to 0\$ の場合が homogeneous jet に相当する。

この場合の連行係数は \$E_0 \approx 0.075\$ 程度で (15) 式及び (17) 式は

$$E_0 = g' \cdot \frac{2}{3} \frac{\beta_*}{\delta} \delta_f \dots (18), \quad \left\{ \frac{1}{\beta_*} - (\alpha_1 + 4\alpha) \frac{2\beta_*}{3\delta} \delta_f \right\} g'^2 + \left\{ \frac{1}{3} \alpha_2 \beta_* - \frac{8}{3} \beta_* \delta_f \right\} = 0 \dots (19)$$

となる。流速分布及び密度分布として我々の実験結果から \$f(\eta) = 1.17\eta^3 - 2.33\eta^2 + 0.16\eta + 1\$ 及び \$m(\eta) = -0.833\eta^2 - 0.167\eta + 1\$ を採用して諸定数を求めると \$\alpha = 0.596\$, \$r = 0.452\$, \$\delta = 0.393\$, \$\theta = 0.638\$, \$\mu_c = -0.151\$, \$\lambda_c = 0.235\$, \$\delta_f = 1.180\$, \$\alpha_1 = -0.499\$, \$\alpha_2 = -1.452\$ となる。

(18) (19) 式で \$E_0 = 0.075\$ として \$\beta_*\$ を逆算すると、\$\beta_* = 0.138\$ となり、ほぼ妥当な値が得られる。

次に (15) (17) 式を用いて、\$E\$ と Richardson 数の関数として計算を行なった。

その結果は、図-2 に我々の実験結果、及び Ellison & Turner の実験曲線とともに示されている。

\$\alpha_* = 3.0\$ の場合は Ellison & Turner の実験曲線とも良く一致している。

連行係数 \$E\$ は Richardson 数に規定されるというのは早くから言われていたが、理論的にも確かめることが出来た。

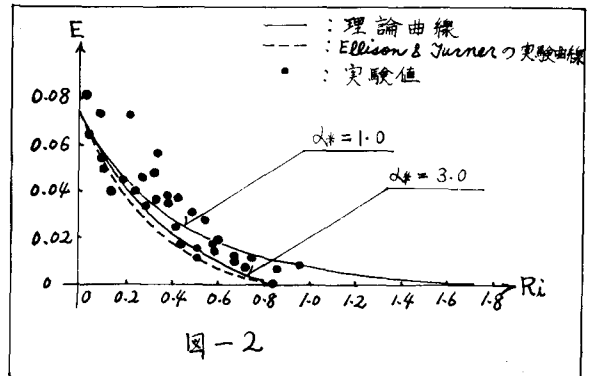


図-2

鉛直重力噴流 (Forced plume)

次に図-3に示されているように、静止した密度 ρ_w の流体中に密度 $\rho_0 (< \rho_w)$ の流体が鉛直上方に噴出された場合について取扱う。この場合は水平密度噴流と反対に、密度差の影響が流れの不安定化の方向に働くので、Eの値は R_0 とともに増加することが期待される。現象は軸対称なので、座標は円筒座標系を用いる。

現象を規定する基礎式としては二次元水平噴流の場合と同様に、

$$\text{連続の式} \quad \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [r u_r] = 0 \quad (20)$$

$$\text{運動方程式} \quad \frac{\partial (\rho u_x^2)}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [r \rho u_r u_x] = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [r \tau] - g(\rho - \rho_w) \quad (21)$$

$$\text{拡散方程式} \quad \frac{\partial (u_x \rho)}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [r u_r \rho] = -\frac{1}{r} [r \overline{u_r^2 \rho}] \quad (22)$$

平均流のエネルギー $q^2 = u_x^2 + u_r^2$ の方程式

$$\frac{\partial}{\partial x} \left\{ u_x \left(\frac{1}{2} q^2 + \frac{p}{\rho} + g x \right) \right\} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r u_r \left(\frac{1}{2} q^2 + \frac{p}{\rho} + g x \right) \right\} = \frac{u_x}{\rho r} \frac{\partial}{\partial r} [r \tau] \quad (23)$$

これエネルギー $C^2 = \overline{u_x^2} + \overline{u_r^2} + \overline{u_\theta^2}$ の方程式

$$\frac{\partial}{\partial x} \left\{ u_x C^2 \right\} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [r u_r C^2] = \frac{2\tau}{\rho} \frac{\partial u_x}{\partial r} + \frac{2g}{\rho} k_f \frac{d\rho}{dx} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [r \overline{u_r^2} C^2] - \frac{10V}{\lambda^2} C^2 + P'' \quad (24)$$

Reynolds 応力 $\overline{u_x u_r}$ の輸送方程式

$$\frac{\partial}{\partial x} \left\{ u_x \overline{u_x u_r} \right\} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [r u_r \overline{u_x u_r}] = -\overline{u_r^2} \frac{\partial u_x}{\partial r} + \frac{g}{\rho} k_f \frac{d\rho}{dx} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [r \overline{u_r^2} (\overline{u_x u_r})] + D_i + P'' \quad (25)$$

plume内では、やはりこの場合も流速分布、密度と濃分布の相似性が成り立つものと仮定して、次のように表わす。 $u_x = U_x \cdot f(\eta) \dots (26)$ $\rho = \rho_w - (\rho_w - \rho_s) m(\eta) \dots (27)$ $\eta = \frac{r}{B} \dots (28)$

ここで B : plume 中心軸から境界面までの距離, ρ_s, U_x : 中心軸上の密度及び流速

(20)(21)(22)(23) の各式を plume 断面に関して積分すると、 $\tau/\rho = \frac{1}{3} C \cdot l \cdot \frac{d u_x}{dx}$ とし

$$\frac{d}{dx} [B^2 U_x] = 2 E B U_x \quad (29) \quad \text{ここで} \quad \alpha' = \int_0^1 \eta f d\eta, \quad \theta' = \int_0^1 \eta m d\eta, \quad r' = \int_0^1 \eta f^2 d\eta$$

$$\frac{d}{dx} [f B^2 U_x^2] = \theta' g E_s B^2 \quad (30) \quad \delta' = \int_0^1 \eta f^3 d\eta, \quad \delta_f' = \int_0^1 \eta \left(\frac{df}{d\eta} \right)^2 d\eta$$

$$\frac{d}{dx} [E_s B^2 U_x] = 0 \quad (31) \quad E_s = (\rho_w - \rho_s) / \rho_w$$

$$\frac{d}{dx} [\delta' B^2 U_x^3] = 8 \alpha'^3 E^3 B U_x^3 + 2 g \theta' B^2 E_s U_x - \frac{2}{3} \delta_f' C \cdot l \cdot U_x^2 \quad (32)$$

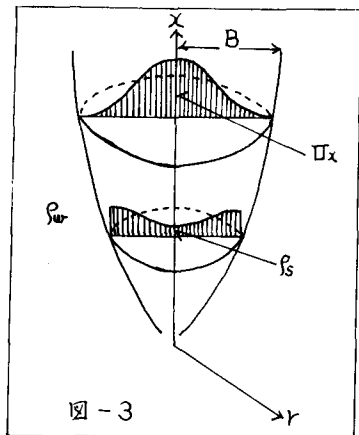
が得られる。また $k_f = \alpha_* \frac{1}{3} \cdot C \cdot l$ とし、二次元水平噴流と同様に $D_i = -\frac{40V}{\lambda^2} \overline{u_x u_r}$ とすると (24)(25) 式の plume 断面についての積分は

$$\frac{d}{dx} [\alpha' \cdot C^2 B^2 U_x] = \frac{2}{3} \delta_f' C \cdot l U_x^2 - \frac{5V}{\lambda^2} C^2 B^2 - \frac{2}{3} \alpha_* C \cdot l \cdot \theta' g \frac{d}{dx} [E_s B^2] \quad (33)$$

$$\alpha_{11} \beta_* g' \frac{\partial}{\partial x} [B^2 U_x^3] = \alpha_{12} g^2 \cdot B U_x^3 + \alpha_{14} \alpha_* \beta_* g g' E_s B^2 U_x - \alpha_{12} \beta_* \frac{40V}{\lambda^2} g' B^2 U_x^2 \quad (34)$$

となる。但し、 $g' = \frac{C}{U_x}$, $l = \beta_* B$, $\alpha_{11} = \int_0^1 \eta f \frac{df}{d\eta} d\eta$, $\alpha_{12} = \int_0^1 \eta \frac{df}{d\eta} d\eta$, $\alpha_{14} = \int_0^1 \eta \frac{dm}{d\eta} d\eta$

(29)(30)(31) の関係を用いて (32) 式の左辺が連行係数 E を含む形に変形すると、若干の計算の後、



$$4\alpha'^3 E^3 + \delta' E = \left(\frac{\delta'\theta'}{\gamma'} - \gamma' \right) \frac{1}{F_*^2} + \frac{1}{3} \delta_f' \beta_* \gamma' \quad (35) \quad \text{ここで } \frac{1}{F_*^2} = \frac{\varepsilon_s \gamma \theta}{U_x^2}$$

が得られる。また(34)式を用いて(33)式から Taylor の *micro scale* を消去した後、(29)(30)(31)(32)の関係を用いて(33)式を γ' について整理すると、若干の計算を経て、次の式が得られる。

$$A \gamma'^2 + B \gamma' + C = 0 \quad \cdots (36) \quad \text{ここで } A = \frac{1}{8\beta_*} + \frac{\alpha_{11}}{12\alpha_{12}\delta'} \delta_f' \beta_*$$

$$B\left(\frac{1}{F_*^2}, E\right) = 2\alpha' \left(\frac{\theta'}{\gamma'} \frac{1}{F_*^2} - E \right) + \frac{\alpha_{14}}{8\alpha_{12}} \alpha_* \left(\frac{1}{F_*^2} \right) - \frac{\alpha_{11}}{\alpha_{12}\delta'} \alpha'^3 E^3 - \frac{\alpha_{11}\gamma'}{4\alpha_{12}\delta'} \left(\frac{1}{F_*^2} \right)$$

$$C\left(\frac{1}{F_*^2}, E\right) = \frac{4}{3} \alpha_* \beta_* \theta' E \cdot \frac{1}{F_*^2} - \frac{2}{3} \alpha_* \beta_* \frac{\theta'^2}{\gamma'} \left(\frac{1}{F_*^2} \right)^2 - \frac{2}{3} \delta_f' \beta_*$$

(35)(36)式から γ' 及び E はそれぞれ $1/F_*^2$ の関数として与えられる。

なお $1/F_*^2 \rightarrow 0$ の場合が *homogeneous symmetrical jet* に相当するが、この場合の連行係数は Albertson らの実験から $E_0 \approx 0.1$ 程度である。 $1/F_*^2 \rightarrow 0$ の場合、(35)(36)式は

$$4\alpha'^3 E^3 + \delta' E = \frac{1}{3} \delta_f' \beta_* \gamma' \quad \cdots (37) \quad \left(\frac{1}{8\beta_*} + \frac{\alpha_{11}}{12\alpha_{12}\delta'} \delta_f' \beta_* \right) \gamma'^2 - \left(2\alpha' E + \frac{\alpha_{11}}{\alpha_{12}\delta'} \alpha'^3 E^3 \right) \gamma' - \frac{2}{3} \delta_f' \beta_* = 0 \quad \cdots (38)$$

となる。速度分布及び密度欠損分布は Morton や Rouse らの実験から、両者とも Gauss 分布で表わされるとしている。従ってここでは、後の積分を容易にすることを考慮して、Gauss 分布に似せた次の関数形で表わすことにする。 $f(\eta) = m(\eta) = 1.54\eta^3 - 2.48\eta^2 - 0.06\eta + 1$

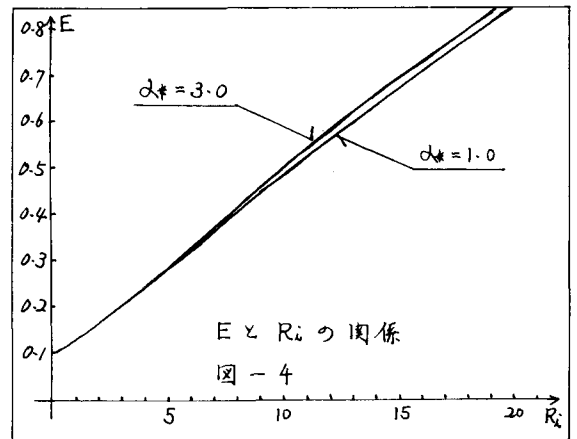
従って諸定数は $\alpha' = 0.168$, $\theta' = 0.168$, $\gamma' = 0.097$, $\delta' = 0.067$, $\delta_f = 0.603$

$\alpha_{11} = -0.196$, $\alpha_{12} = -0.528$, $\alpha_{14} = -0.528$ で与えられる。

式(37)(38)で $E_0 \approx 0.1$ として β_* を逆算すると $\beta_* = 0.133$ となり、妥当な値と思われる。

次に式(35)(36)を用いて E を $Ri = \varepsilon_m \gamma \cdot (2B)/U_m^2 = \theta'/\alpha'^2 \cdot \frac{1}{F_*^2}$ の関数として、計算を行なった。但し $U_m \varepsilon_m$ は断面全体についての平均量。

その結果は図-4 に示されている。鉛直重力噴流の連行係数に関する系統的な実験は、今のところ行なわれていないので、この理論を確かめることは出来ないが、首藤が *bent over* の *plume* に対して行なった実験で $E = 0.33$ (経路、希釈率、幅より決定) 或 $E = 0.17$ (厚さより決定) を与えている。また FAN が同じく実験より $E = 0.4 \sim 0.5$ 程度の値を与えており、傾向的には、この理論と一致している。



参考文献

- 1) 栗原道徳 流体渦動状態の研究(I) 九大流体工学研究所報告 オ一巻 オ一号
- 2) 栗原道徳 流体渦動状態の研究(IV) 九大流体工学研究所報告 オ三巻 オ三号
- 3) 首藤伸夫 流水中の重力拡散 オ17回海岸工学講演会論文集 昭和45年