I-284 一平面内にない耐風ケーブルの釣合について

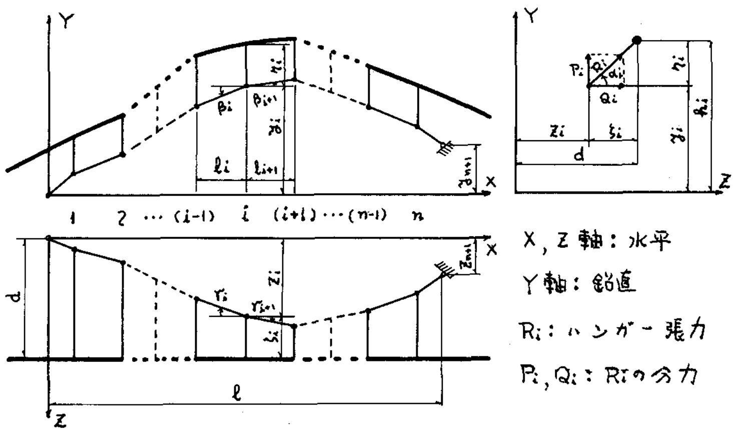
川田工業(株) 正会員 三品 吉彦

1. 概要

自立式の水管橋などのように鉛直面内で曲線をなす線状構造物に耐風索を設けると，ケーブルは空間曲線を描いて一平面内には納らない。これの解析は一般に厄介な問題と考えられるが，設計のために形状や無応力長を求めるだけであれば，設計条件をうまく選ぶことにより，ハンガーの数をnとしたとき$(n+1)$元の連立1次方程式を解く問題に還元することができる。

2. 基本式の誘導

座標系と記号を右図のように定義し，次の仮定を置く。



X, Z 軸：水平
Y 軸：鉛直
R_i：ハンガー張力
P_i, Q_i：R_iの分力

①ケーブルとハンガーの自重は格点荷重W_iに置き換えてもかまわない。

②ケーブルの水平力Hは任意に与え，計算の過程に於ても変化しないものとする。

③ハンガーは常にX軸に垂直な面，すなわち鉛直面の中にあるものとする。

④考えている構造系は（耐風索も含めて）XY面に平行な鉛直対称面をもつものとする。

直交する3つの投影面内で各格点iに於るケーブル力とハンガー力の釣合，およびケーブル碇着点に於るモーメントの釣合を考えると，次のように$(3n+2)$個の式が得られる。

$$H(\tan\beta_i - \tan\beta_{i+1}) = P_i - W_i \quad (i=1,2,\cdots,n) \tag{1}$$

$$H(\tan\gamma_i - \tan\gamma_{i+1}) = Q_i \quad (i=1,2,\cdots,n) \tag{2}$$

$$Q_i\cdot\tan\alpha_i = P_i \quad (i=1,2,\cdots,n) \tag{3}$$

$$\sum_{i=1}^{n}(P_i - W_i)\sum_{j=1}^{i} l_j + lH\tan\beta_{n+1} = Hy_{n+1} \tag{4}$$

$$\sum_{i=1}^{n} Q_i\sum_{j=1}^{i} l_j + lH\tan\gamma_{n+1} = Hz_{n+1} \tag{5}$$

次に，ケーブル形状はどうあろうとも，ハンガーは対象となる構造物とケーブルとを結ぶ線上にあるという幾何学的条件から，次式が成立しなければならない。

$$\xi_i\tan\alpha_i = \eta_i \quad (i=1,2,\cdots,n) \tag{6}$$

こゝで，η_iとξ_iは他の投影面に於る幾何学的条件によって規定される。すなわち，仮定④を考慮し，対象としている構造物の鉛直面内に於る撓みの影響線縦距をF_{ij}とすると，

$$\eta_i = (h_i - \sum_{j=1}^{n} F_{ij}\cdot 2P_i) - \sum_{j=1}^{i} l_j\cdot\tan\beta_j \quad (i=1,2,\cdots,n) \tag{7}$$

$$\xi_i = d - \sum_{j=1}^{i} l_j\tan\gamma_j \quad (i=1,2,\cdots,n) \tag{8}$$

であるから，(3)式を(1)式に代入して考えれば，結局，Q_i, α_iおよびβ_i, γ_iの$(4n+2)$個の未知数に対

して(1),(2)および(6)の$(3n+2)$個の方程式が得られたから，未知数のうち任意のn個を設計条件として与えれば解が得られる。Q_iはP_iまたはR_iで置き換えても良いが，解式が面倒になる。

3. 実用公式

任意のn個の値を与えるとき，ハンガー力が圧縮となるような解を避ける注意が必要である。またその選び方によっては解式が煩雑となる。実用上は水平投影面内に於けるケーブル形状を抛物線とすれば，Q_iと水平力Hとの関係が容易に把握できるので，Hの値を定めるためにも便利である。抛物線としないまでも，Q_iとγ_iの一方を与えれば(2)および(5)式によって他方が求まる関係から，$(\tan\alpha_i)$と$(\tan\beta_i)$を未知数とする線型方程式(1),(4)および(6)を解く問題に帰する。

さらに(1)式の関係を(6)式のγ_iおよび(4)式に代入すると，$(\tan\beta_i)$のみについての$(n+1)$元連立方程式となる。行列表示を行うと次のようになるが，係数行列および右辺の第2項は対象としている構造物の撓みの影響を表わしている。

$$\left\{\begin{bmatrix} (\lambda_1 l_1+\zeta_1) & -\zeta_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \lambda_2 l_1 & (\lambda_2 l_2+\zeta_2) & -\zeta_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \lambda_3 l_1 & \lambda_3 l_2 & (\lambda_3 l_3+\zeta_3) & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \lambda_n l_1 & \lambda_n l_2 & \lambda_n l_3 & \cdots & (\lambda_n l_n+\zeta_n) & -\zeta_n \\ l_1 & l_2 & l_3 & \cdots & l_n & l_{n+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_{11} & (G_{12}-G_{11}) & (G_{13}-G_{12}) & \cdots & (G_{1n}-G_{1,n-1}) & -G_{1n} \\ G_{21} & (G_{22}-G_{21}) & (G_{23}-G_{22}) & \cdots & (G_{2n}-G_{2,n-1}) & -G_{2n} \\ G_{31} & (G_{32}-G_{31}) & (G_{33}-G_{32}) & \cdots & (G_{3n}-G_{3,n-1}) & -G_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ G_{n1} & (G_{n2}-G_{n1}) & (G_{n3}-G_{n2}) & \cdots & (G_{nn}-G_{n,n-1}) & -G_{nn} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}\right\} \begin{bmatrix} \tan\beta_1 \\ \tan\beta_2 \\ \tan\beta_3 \\ \vdots \\ \tan\beta_n \\ \tan\beta_{n+1} \end{bmatrix} =$$

$$= \left\{\begin{bmatrix} h_1\lambda_1 - \zeta_1\mu_1 \\ h_2\lambda_2 - \zeta_2\mu_2 \\ h_3\lambda_3 - \zeta_3\mu_3 \\ \\ h_n\lambda_n - \zeta_n\mu_n \\ y_{n+1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \sum_1^n G_{1j}\mu_j \\ \sum G_{2j}\mu_j \\ \sum G_{3j}\mu_j \\ \\ \sum_1^n G_{nj}\mu_j \\ 0 \end{bmatrix}\right\} \qquad (9)$$

ただし，次のように置いた。

$$\lambda_i = Q_i/H$$

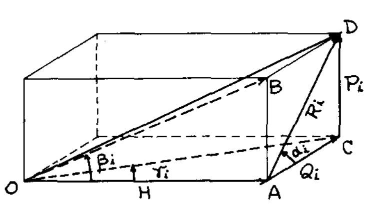
$$\mu_i = W_i/H$$

$$G_{ij} = 2Q_iF_{ij}$$

4. 仮定の吟味

仮定①とそれを用いてつくった(1)式の中のW_iは耐風索の形状が確定しなければ求め得ないものである。従って(9)式を繰り返し用いて収束させることになる。本来ならばケーブルあるいはハンガーのたるみを考慮した力の釣合から(1)式をつくるべきであるが，そうすると方程式が非線型となる。いずれにしても収束計算を伴うので，ここでは簡単で間違いのない前者を選んだ。実用的にはW_iをすべて0として第1回目の計算を行い，その結果からW_iをもとめてもう1度繰返せば充分と考えられる。

仮定②については次のように説明することができる。右図に於て水平力Hを与えた後にQ_iを，さらにP_i（つまりα_i）を与えて釣合の位置を求めるのであるから，一般のケーブル問題ではこの区間のケーブル長が$\overline{OA}$から$\overline{OD}$に変化してHを一定とすることができない。しかるにここでは，釣合計算の結果により



ケーブル長$\overline{OD}$が決まる，つまり模式的に言えば，Hを一定に保つに必要なだけのケーブルを繰り出すことが出来ると考えるから，角度α_i, γ_i等は微少でなくてもかまわないわけである。仮定③についても同様にその妥当性を証明できるから，そのように設計すればよい。

5. おわりに

非対称な係数行列の物理的意味の考察や，任意の設計条件，あるいは綾状ハンガーの取扱いについては次回にゆずりたい。最後に，助言をいただいた法政大学の大地羊三先生に謝意を表します。