

東京大学工学部 学生会員 ○森光康夫
 東京大学工学部 正会員 伊藤 学

1. まえがき

風による建造物の振動を問題とする際、限界風速の推定ばかりでなく、応答振幅の推定・振幅の時間的变化の予測も重要である。特に、不安定なリミット・サイクルをえがく振動の振幅は、設計風速を設定する際には欠かすことができない。このような問題に対しては、非定常空気力の、振幅に対する非線形性を考慮せねばならない。非線形性を扱ったこれまでの研究としては、準定常理論があげられる。本報告では、測定空気力を用いて自励振動の振幅を求める方法について考察するとともに、正方形断面の非定常空気力測定結果を整理した。

2. 振動方程式

代表長 B の物体が、 $y = y_0 e^{i\omega t}$ で振動している時、物体に作用する空気力は単位長あたり

$$L = \frac{1}{2} \rho V^2 B [C_0 + C'_1(t) + C_v(t)] \tag{1}$$

で表わされる。ここに、 C_0 は平均値で振動には関与しないから無視できる。 $C'_1(t)$ は周期 $T = \frac{2\pi}{\omega}$ なる周期函数(自励振力項)、 $C_v(t)$ は渦発生により生ずる強制力である。 $C_v(t)$ の卓越振動数が系の固有振動数と十分離れていれば、 $C_v(t)$ の影響は無視でき、又、渦が物体にロックされていれば $C_v(t)$ は $C'_1(t)$ の中に含まれる。従って、これらの領域を対象とする限り $C_v(t)$ を無視してさしつかえない。よって振動方程式は、無次元化時間 $\tau = \omega t$ を用いれば、次式で表わされる。

$$\ddot{z} + 2\alpha_2 r_2 \dot{z} + r_2^2 z = \frac{V_2}{m} \left(\frac{V_r}{2\pi}\right)^2 C'_1(\tau) \tag{2}$$

ここに $z = y/B$, $r_2 = \omega_0/\omega$ (ω_0 は系の固有振動数), $\alpha_2 = \delta/2\pi$ (δ は系の対数減衰率), m は単位長さ当りの質量, $V_2 = \rho B^2/2$ (ρ は空気密度), $V_r = V/NB = 2\pi V/\omega B$ は換算風速。

3. 振幅決定式

$z(\tau) = z_0 e^{i\tau}$ の時、 $C'_1(\tau)$ は無次元化周期 2π の周期函数だから次のように展開される。

$$C'_1(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cdot e^{i(n\tau + \beta_n)} \tag{3}$$

$z(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} z_{0n} \cdot e^{i[n\tau + \beta_n]}$ の形の(2)式の解を求める。この時 $C'_1(\tau)$ は次式で表わされると考える。

$$C'_1(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} C_n \cdot e^{i(n\tau + \beta_n + \beta_m)} \tag{4}$$

これらを(2)式に代入し、係数比較を行えば、次の連立方程式を得る。

$$z_{01} [-1 + 2i\alpha_2 r_2 + r_2^2] = \frac{V_2}{m} \left(\frac{V_r}{2\pi}\right)^2 C_1 e^{i\beta_1} \tag{5}$$

$$z_{02} [-4 + 4i\alpha_2 r_2 + r_2^2] = \frac{V_2}{m} \left(\frac{V_r}{2\pi}\right)^2 [C_1 e^{i\beta_1} + C_2 e^{i(\beta_2 + (\beta_1 - \beta_2))}]$$

$$\dots \dots \dots \tag{6}$$

近似解は(5)式から得られる。一般に $z_{02} \ll z_{01}$ であるから、 C_1, β_1 の値が得られれば解は求めることになる。 $C_1 \cdot e^{i\beta_1} = C_{1R} + iC_{1I}$ とすれば、(5)式の実部と虚部から次の連立方程式を得る。

$$\begin{cases} (\beta_2^2 - 1) z_0 = \frac{V_2}{m} \left(\frac{V_r}{2\pi}\right)^2 C_{1R}(z_0, V_r) \\ 2\alpha_2 r_2 z_0 = \frac{V_2}{m} \left(\frac{V_r}{2\pi}\right)^2 C_{1I}(z_0, V_r) \end{cases} \tag{7}$$

よって、 C_{IR} , C_{IZ} が C_0 , V_r の関数として実験的に得られれば、振幅が決定できることになる。

4. 振動の安定性・時間的变化

(7)式で得られた振動の安定・不安定は、Poincaré の判定条件を適用すれば(8)式で判別される。

$$\frac{\partial}{\partial C_0} [C_{IZ}(C_0, V_r) / C_0] \begin{cases} < 0 & \text{安定} \\ > 0 & \text{不安定} \end{cases} \quad (8)$$

$C_1(\tau) = C_1 e^{i\mu_1 \tau}$ を不安定な周期解とし、 $C_2(\tau) = C_2 e^{i\mu_2 \tau}$ を安定な周期解とする時、振幅が C_1 の近傍 $C_1 + \Delta_1$ から C_2 の近傍 $C_2 - \Delta_2$ まで変化するのに要する無次元化時間 τ は、 $\mu_1 = 1$ として

$$\tau = \int_{C_1 + \Delta_1}^{C_2 - \Delta_2} \frac{C_2 dC_0}{\frac{1}{\pi} \left(\frac{V_r}{2C_0} \right)^2 C_{IZ} - 2C_0 dC_0} \quad (9)$$

で得られる。

5. 正方形断面の非定常空気力測定結果

強制振動法によって測定した空気力 C_{IZ} を Fig. 1 に、位相差 β_1 を Fig. 2 に、パワースペクトルの形から判断した同期領域を Fig. 3 に示す。解析方法は従来と異なり計算機を利用した。検出される力 $F(t)$ は、雑音 $n(t)$ をも考慮して(10)式であらわされる。

$$F(t) = \frac{1}{2} \rho V^2 B [C_I'(t) + C_0(t)] + n(t) \quad (10)$$

両辺に C_0/C_0 および $C_0/\omega C_0$ をかけて十分長い時間積分すれば、 $C_0(t)$, $n(t)$ に関する項は零になり、 $\int_0^{T_1} C_I'(t) \frac{C_0}{\omega} dt = \frac{T_1}{2} C_{IR}$,
 $\int_0^{T_1} C_I'(t) \frac{C_0}{\omega C_0} dt = \frac{T_1}{2} C_{IZ}$ だから、

$$C_{IR} \approx \frac{2}{T_1} \int_0^{T_1} F(t) \frac{C_0}{\omega} dt, \quad C_{IZ} \approx \frac{2}{T_1} \int_0^{T_1} F(t) \frac{C_0}{\omega C_0} dt \quad (11)$$

となる。ここに図示した結果は $\omega \approx 20 \text{ rad/s}$, $T_1 \approx 7 \text{ sec}$ である。

6. 考察

図から次のことが言えよう。

(i) 同期領域は C_0 が増加と共に急速に広がり、獨励振域が、局部的なものだけでなく、 V_r の広い範囲でも大振幅の獨励振が起り得るということを示している。

(ii) Fig. 1, 2, 3 の横軸は風速を無次元化する際、代表長として $(B + 2.2a)$ をとったと同等であるが、図から、 C_{IZ} が負から正に移る限界点は、このようにして無次元化を行えば振幅によらず完全に一致することがわかる。

7. あとがき

(7)式にもとづく振幅の計算方法は、準定常理論を適用し難いおじれ振動において特に効力を発揮すると思われる。曲げおじれ連成振動においても同じ考え方で計算できる。又、自由振動法から C_{IR} , C_{IZ} を求める方法も、振幅に対する減衰率の変化がわかれば可能である。具体的計算は現在検討中である。

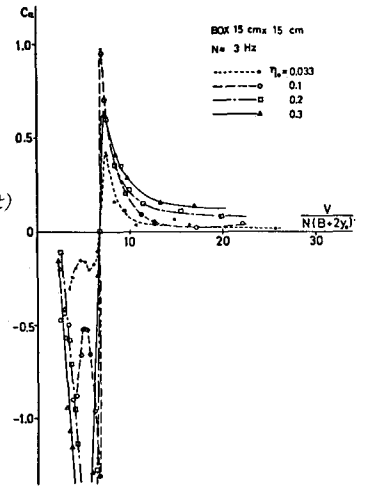


Fig. 1 Aerodynamic Coefficient (imaginary part)

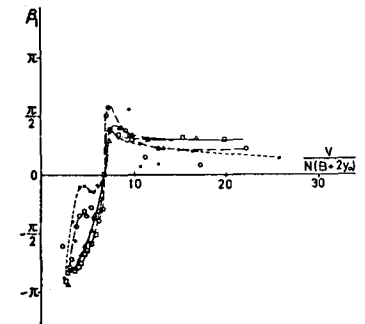


Fig. 2 Phase Difference

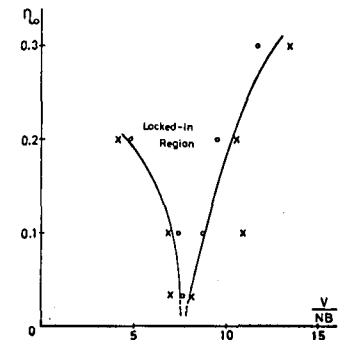


Fig. 3 Locked-in Region