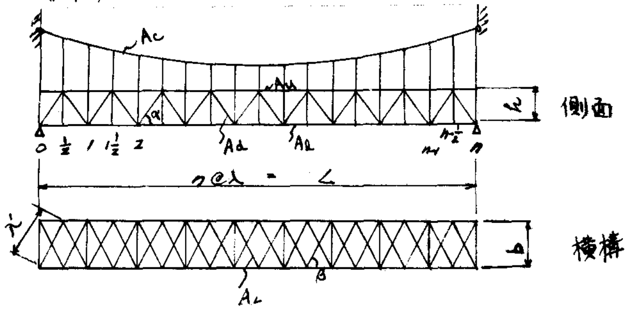
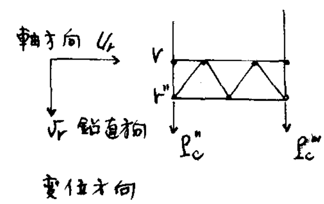
I-267　　和分変換による吊橋撓度理論の解法について

室蘭工業大学　正員　能町純雄
同　同　松岡健一
函館ドックK.K　同　○小針憲司

1. まえがき

断面として，トラス補剛桁を有する図のような吊橋については，今までにもいろいろの方法によって解かれている。ここでは，部材構成を忠実に見て，有限なフーリエ定和分変換を用い，横構を含めた全部材について効果的に解く事が出来たのでここに報告する。尚これは，対傾構の効果を調べるための予備計算として行ったものである。





2. 釣合い式及び結果

仮定：1)任意の格点において，吊材の伸びは無視する。2)ロープは格点間において直線とする。
3)荷重は橋軸直角方向で対称とする。

各部材についての部材力式をとり，例へば斜材について軸力Sとすると

$S = k_4\{(U_{r+1/2}-U_r')\cos\alpha + (V_r'-V_{r+1/2})\sin\alpha\}$, $k_4 = EA_d/h'$　として各格点回りの力の釣合い式を求め，各未知数U，Vについて整理する。例へばr点鉛直方向力の釣合い式は

$k_4\sin\alpha\cos\alpha(U_{r+1/2}-U_{r-\frac{1}{2}}) + 2k_4\sin^2\alpha V_r' - k_4\sin^2\alpha(V_{r+\frac{1}{2}}+V_{r-\frac{1}{2}}) = P_c''$

同様の式を各格点について求め，定和分変換を施し，両端単純支持である事を考慮して整理すると

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12}\cos\frac{i\pi}{2n} & 0 & 0 & 0 \\ k_{21}\cos\frac{i\pi}{2n} & k_{22} & k_{23}\cos\frac{i\pi}{2n} & k_{24}\sin\frac{i\pi}{2n} & 0 \\ 0 & k_{32}\cos\frac{i\pi}{2n} & k_{33} & 0 & k_{35}\sin\frac{i\pi}{2n} \\ 0 & k_{42}\sin\frac{i\pi}{2n} & 0 & k_{44} & k_{45}\cos\frac{i\pi}{2n} \\ 0 & 0 & k_{53}\sin\frac{i\pi}{2n} & k_{54}\cos\frac{i\pi}{2n} & k_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{U}_i \\ \check{U}_{i+\frac{1}{2}} \\ \tilde{U}_i \\ \tilde{V}_i \\ \bar{V}_{i+\frac{1}{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ C_{46} \\ C_{56} \end{bmatrix}$$

ここで $k_{11} = -k_{12} = -k_{21} = -2(k_2 + k_1/2\cdot\cos^2\beta)$, $D_i = 2(1-\cos\frac{i\pi}{n})$

$k_{22} = k_{11} - 2k_4\cos^2\alpha$, $k_{23} = k_{32} = 2k_4\cos^2\alpha$

$k_{24} = -k_{42} = -k_{35} = -k_{53} = 2k_4\cos\alpha\cdot\sin\alpha$

$k_{33} = -\frac{1}{2}k_3(D_i + 4k_4\cos^2\alpha/k_3)$

$k_{44} = -k_{45} = k_{54} = -k_{55} = 2k_4\sin^2\alpha + 4(1+\beta)H_g/\lambda$

$k_1 = 2A_LE/\lambda'$　$k_2 = 2A_uE/\lambda$　$k_3 = 2A_lE/\lambda$　$C_{46} = -\sum_{c=1}^{n-1}(g\beta)\sin\frac{i\pi}{n}c + P_c'\sin\frac{i\pi}{n}c$　$C_{56} = +\sum_{c=0}^{n-1}(g\beta)\sin\frac{i\pi}{n}(c+0.5) - P_{c+\frac{1}{2}}\sin\frac{i\pi}{n}(c+0.5)$

g：格点死荷重(t)　Hg：死荷重によるロープ水平張力(t)　H：活荷重によるロープ水平張力(t)　$\beta = H/H_g$

上記マトリックスより，各未知数を計算して

$\bar{U}_i = \{\frac{1}{2}C_{46}S_1\sin\frac{i\pi}{n} + C_{56}(4-D_i)/4.0\cdot S_2\sin\frac{i\pi}{2n}\}/\{D_i(D_iM_1+M_2)\}$；この値について逆変換し直接計算しても求められるが，計算を容易にするため部分分数に展開（D_iについて）し，閉じた関数で表示する。

$\therefore U_r = -\frac{1}{2} P_{c+\frac{1}{2}} \xi_2 [\{-G_1(r-0.5, c+0.5) + G_1(r+0.5, c+0.5)\}/M_2 - (0.25/M_1 + 1/M_2)\{-G_2(r-0.5, c+0.5) + G_2(r+0.5, c+0.5)\}]$

$\quad + \frac{1}{4} P_c \xi_2/M_2 \{-G_1(r-1, c) + G_1(r+1, c) + G_2(r-1, C) - G_2(r+1, c)\} - \frac{1}{2} g\beta/M_2 \cdot (\xi_1 - \xi_2) F_1(r)$

$\quad - \frac{1}{2} g\beta \{\xi_1/M_2 \cdot (\psi/4 + 1) - \xi_2 (0.5/M_1 + 1.0/M_2)\} F_2(r)$; $\qquad r : 0, 1, 2, \cdots, n-1, n$;

他についても同様にして

$U_{r+\frac{1}{2}} = -\frac{1}{4} P_{c+\frac{1}{2}} \xi_2/M_2 \{-G_1(r-1.5, c+0.5) + G_1(r+0.5, c+0.5) + G_2(r-1.5, c+0.5) - G_2(r+0.5, c+0.5)\}$

$\quad + \frac{1}{2} P_c \xi_1/M_2 \{-G_1(r-1.0, c) + G_1(r, c) + G_2(r-1, c) - G_2(r, c)\} - g\beta/M_2 [\xi_1/2.0 \{-F_3(r-1) + F_3(r)$

$\quad + 2.0/\psi \cdot F_4(r)\} - \xi_2/4.0 \cdot \{F_1(r-1) + F_1(r) - F_2(r-1) - F_2(r)\}]$; $\qquad r : 0, 1, 2, \cdots, n-2, n-1$;

$U_r'' = -\frac{1}{2} P_{c+\frac{1}{2}} \xi_3/M_2 \cdot \{-G_1(r-0.5, c+0.5) + G_1(r+0.5, c+0.5) + G_2(r-0.5, c+0.5) - G_2(r+0.5, c+0.5)\}$

$\quad + \frac{1}{16} P_c \xi_4/M_2 \{-G_1(r-1.0, c) + G_1(r+1, c) + G_2(r-1, c) - G_2(r+1, c)\} - g\beta/M_2 [(1/8 \cdot \xi_4 - \xi_3/2) \cdot F_1(r)$

$\quad + \{-\frac{1}{8}(1 + \psi/4) \cdot \xi_4 + \xi_3/2\} \cdot F_2(r)]$; $\qquad r : 0, 1, 2, \cdots, n-1, n$;

$V_r'' = P_{c+\frac{1}{2}} [\frac{1}{2} \cdot \xi_5/M_2 \cdot \{G_1(r, c) + G_1(r, c+1)\} - \frac{1}{2}(\xi_6/M_1 + \xi_5/M_2)\{G_2(r, c) + G_2(r, c+1)\}]$

$\quad + P_c [\xi_5/M_2 \cdot G_1(r, c) - (\xi_8/M_1 + \xi_5/M_2) \cdot G_2(r, c)] - g\beta [2 \cdot \xi_5/M_2 \cdot F_3(r) - \{(\xi_6 + \xi_8)/M_1$

$\quad + \xi_5/M_2 \cdot 2.0\}/\psi \cdot \{1.0 - F_5(r)\}]$; $\qquad r : 1, 2, \cdots, n-2, n-1$;

$V_{r+\frac{1}{2}} = P_{c+\frac{1}{2}} [\xi_5/M_2 \cdot G_1(r-0.5, c+0.5) - (\xi_7/M_1 + \xi_5/M_2) \cdot G_2(r-0.5, c+0.5)]$

$\quad + \frac{1}{2} P_c [\xi_5/M_2 \cdot \{G_1(r-1, c) + G(r, c)\} - (\xi_6/M_1 + \xi_5/M_2)\{G_2(r-1, c) + G_2(r, c)\}]$

$\quad - g\beta/M_2 \cdot \xi_5 \{F_3(r-1) + F_3(r) \times 3.0 - F_1(r)\}\frac{1}{2} + g\beta [(\xi_6/M_1 + \xi_5/M_2)/\psi \cdot (1.0 - F_6(r)) + (\xi_7/M_1$

$\quad + \xi_5/M_2) \cdot \{1.0/\psi \cdot (1.0 - F_5(r)) - \frac{1}{2} \cdot F_2(r)\}]$, $\qquad r : 0, 1, \cdots, n-2, n-1$;

但し $M_1 = k_{12} k_{21} k_{33} k_{45} k_{54}/16.0$; $\quad M_2 = k_{11}\{k_{44} k_{55}(-4k_{33}k_{23} + k_{32}k_{23} - k_{52}k_{11}) + k_{42}k_{24}(2k_{32}k_{55}$

$+ k_{53} \cdot k_{35}) - k_{42}k_{55}(4k_{24}k_{33} - k_{11}k_{35})\}/16.0$; $\quad \psi = M_2/M_1$; $\quad 2\cosh\theta = 2 + \psi$;

$\xi_1 = k_{11}(k_{24}k_{35}k_{53} + k_{23}k_{54}k_{35} - 4k_{24}k_{33}k_{55})/4.0$; $\quad \xi_2 = k_{11}k_{24}k_{33}k_{45}$;

$\xi_3 = k_{11}(k_{24}k_{35}k_{42} + k_{24}k_{32}k_{45} - k_{11}k_{44}k_{35})/4.0$; $\quad \xi_4 = k_{11}k_{11}k_{54}k_{35}$;

$\xi_5 = k_{11}(k_{23}k_{42}k_{35} - 4k_{23}k_{33}k_{55} - k_{22}k_{32}k_{54})/4.0$; $\quad \xi_6 = -k_{11}k_{11}k_{33}k_{55}/4.0$;

$\xi_7 = k_{11}k_{33}(k_{11}k_{44} - k_{24}k_{42})/4.0$; $\qquad \xi_8 = k_{11}k_{11}(k_{35}k_{53}/4.0 - k_{33}k_{54})/4.0$;

$G_1 = \begin{cases} r(n-c)/n & r \leqq c \\ c(n-r)/n & r \geqq c \end{cases} \qquad G_2 = \begin{cases} \sinh\theta(n-c) \cdot \sinh\theta \cdot r/\sinh n\theta & r \leqq c \\ \sinh\theta \cdot c \ \sinh\theta(n-r)/\sinh n \cdot \theta & r \geqq c \end{cases}$

$F_1(r) = -(2nr - n^2 + (-1)^r(1-(-1)^n)/2.0)/2n$;

$F_2(r) = -2\sinh n\theta/2 \cdot \sinh\theta(r - 0.5n)/(\sinh\theta \cdot \sinh\theta n) - (-1)^r(1-(-1)^n)/(n(\psi+4))$;

$F_3(r) = r(n-r)/2.0$; $\quad F_4(r) = 2\sinh\theta/2 \cdot \sinh n\theta/2 \cdot \sinh\theta(r - 0.5n - 0.5)/\sinh n\theta$;

$F_4(r) = 2\sinh n\theta/2 \cdot \cosh\theta(r - 0.5n)/\sinh n\theta$; $\quad F_6(r) = 2\cosh\theta/2 \sinh n\theta/2 \cosh\theta(r + 0.5 - n/2)/\sinh n\theta$

活荷重張力については，鉛直変位を和分して与えられる。$H \cdot L_s/E_c A_c - 1/r \cdot \sum_0^n V \cdot \frac{\Delta}{2} = 0$

$\frac{1}{r} = 8f/L^2 \quad f$：サグ $\quad L_s = \int_0^L \sec^3\varphi \, dx \doteqdot L(1 + 8f^2/L^2) \quad A_c$：ロープ断面積

計算例は当日会場にて発表。

参考文献 (1) S. G. Nomachi : On Finite Fourier Sine Series with Respect to Finite Differences, the Memoirs of the Muroran Institute of Technology, Vol. 5, No. 1, July 1965
(2) 平井敦他 ：鋼橋（Ⅲ） 改訂版 (3) T. Fukuda: ANALYSIS OF LONGITUDINALLY LOADED SUSPENSION BRIDGES, Journal of the STRUCTURAL DIVISION , April , 1968