I-266 エネルギー法によるケーブル構造の解析（オ２報）

（株）神戸製鋼所　正員　波田凱夫
〃　〃　新家徹
〃　〃　広中邦汎
〃　〃○中西宏

1．序論

吊屋根やキャットウォーク等ケーブル構造一般の問題として、変形解析以前に初期形状決定の問題がある。従来、この初期形状の決定にはモデル実験による方法、あるいは最適設計による方法等があるが、それぞれ一長一短があることは周知のことである。そこで本報は、全部材にある張力が働き、また数個の格点座標値を設計条件としてつり合い可能形状を求める方法を論ずる。さらにオ一報、２次元の式を３次元に拡張した。このエネルギー法による大変形解析を利用して、目標形状に近づける手法、および圧縮部材に張力を働かせる等の手法にも触れ、上記手法との得失を述べる。

2．初期形状決定

図１に示すように、格点 i において、つり合いを保っているものとする。X，Y，Z を格点座標とし、P，L，F をそれぞれ部材力、部材長、荷重とすると次式が成立する。

$$\sum_{j=1}^{N}(X_i - X_n)\,P_{ij}/L_{ij} = F_{iX}$$
$$\sum_{j=1}^{N}(Y_i - Y_n)\,P_{ij}/L_{ij} = F_{iY} \qquad (1)$$
$$\sum_{j=1}^{N}(Z_i - Z_n)\,P_{ij}/L_{ij} = F_{iZ}$$

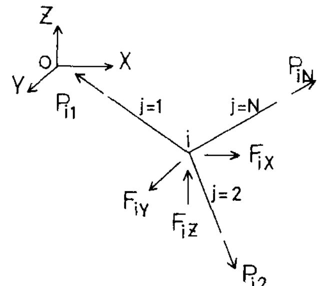

図 1

ここで、n は ij 部材の他端格点を示し、N は格点 i に集まる部材の総数である。次に

$$P_{ij}/L_{ij} = \varphi_{ij} \qquad (2)$$

と表わし、(1)式を行列表示すると、

$$A \cdot \Phi = F \qquad (3)$$

ここで、A は各部材に対する格点座標差を要素とする f × M の行列であり、Φ，F はそれぞれ M × 1、f × 1 のベクトルである。f，M はそれぞれ自由度と部材数を表わす。

一般に f と M は一致することは少なく，また Φ を全て未知数に選ぶ必要性はない。よって Φ および格点座標から f 個の未知数を適当に選び、(3)式を満足する解を見い出せば良い。この場合、(3)式は非線形連立方程式となり、この解法に Newton－Raphson 法がある。しかしこの方法では往々にして解の発散がみられ、本報は次の補足を行なった。

Newton－Raphson 法のあるくり返し回数において、未知格点座標の解の増分を ΔX，未知 φ のそれを Δφ とする。この ΔX，Δφ にある係数 α を乗じ、α を最適に選ぶ方法である。

未知格点座標 $X = X + \alpha\cdot\Delta X$ ，未知 $\varphi = \varphi + \alpha\cdot\Delta\varphi$ を(3)式に代入し、不つり合い力を r とすると、

$$(A+\alpha B)(\Phi+\alpha\psi)=F+r \tag{4}$$

となる。ここで、BはΔXからなる$f\times M$の行列、ψは$\Delta\varphi$を要素とする$M\times1$のベクトルである。

(4)式より、$r=C_1\alpha^2+C_2\alpha+C_3$ (5)

ここで、$C_1=B\cdot\psi$，$C_2=B\cdot\Phi+A\cdot\psi$，$C_3=A\cdot\Phi-F$

この不つり合い力rのノルムは次式となる。

$$\|r\|^2=C_1^TC_1\alpha^4+2C_1^TC_2\alpha^3+(2C_1^TC_3+C_2^TC_2)\alpha^2+2C_2^TC_3\alpha+C_3^TC_3 \tag{6}$$

Tは転置を表わす。(6)式はαに関する4次式であり、この$\|r\|^2$を最小とするαの値を選べば良い。これにより$\|r\|^2$は前回のくり返しにおける$\|r\|^2$より小さくなっても、大きくなることはない。

さて、こうして格点座標およびφの全てが決定されたならば、Lが決定され、ついでPが決定される。これにより力学的条件を満足し、かつ既知数として設計条件を取り入れた、初期形状および初期張力を決定することができる。

3. 大変形解析を利用して目標形状に近づける方法

エネルギー法による大変形解析については、その本質は前回第1報で報告したので参照されたい。本報では、第1報で報告した、大変形計算結果の部材力をさらに初期張力として計算をくり返す方法に検討を加える。(1)式を$T\cdot P=F$と表わす。ここで、Tは$f\times M$のつり合い行列、Pは$M\times1$の部材力ベクトルである。第1章の理論によらず、格点座標および初期張力を仮定した場合、$T_0\cdot P_0=F$は一般につり合い状態になく，格点の変位によるつり合い行列の変化T_1'および部材力の変化P_1'を生じて、次式のつり合い状態となる。

$$(T_0+T_1')P_1'=F-(T_0+T_1')P_0 \tag{7}$$

このときの部材力、$P_1=P_0+P_1'=P_0+D_1[F-(T_0+T_1')P_0]$

ここで、$D_1=[(T_0+T_1')^T(T_0+T_1')]^{-1}(T_0+T_1')^T$

得られたP_1をさらに初期張力として計算をくり返し、n回目には次式となる。

$$P_n=(E+D_n)(E+D_{n-1})\cdots\cdots(E+D_2)\{P_0+D_1[F-(T_0+T_1')P_0]\} \tag{8}$$

ここで、Eは単位行列であり、

$$D_n=[(T_0+T_n')^T(T_0+T_n')]^{-1}(T_0+T_n')^T(T_{n-1}'-T_n') \tag{9}$$

nを増せば、(9)式のD_nは一般にゼロに近づき、P_nは収束する。すなわち$P_n=P_{n-1}$となる。この意味はn回目において、初期張力と計算後の部材力が等しいことを示し、部材弾性伸びは相殺されてゼロとなる。すなわち、第1報で述べた方法をくり返せば、格点座標を規定できないが、部材長を初期のインプットとするつり合い形状を得ることができる。

4. 大変形解析を利用して圧縮部材に張力を働かせる方法

本手法は、まず部材を必ず張力となるものとそうでないものに分ける。これらの部材力をそれぞれP，pと表わす。今、構造がつり合い状態にある場合、つり合い行列をTとして次式のように表わす。

$$T\cdot\begin{pmatrix}P\\p\end{pmatrix}=F \tag{10}$$

次にpを所定の張力p_0に置き換える。これにより不つり合い力rが生じる。

$$r=T\cdot\begin{pmatrix}0\\p-p_0\end{pmatrix} \tag{11}$$

また、この場合のつり合い状態は次式で表わされる。

$$\left(T + T_1''\right)\begin{pmatrix} P_1'' \\ p_1'' \end{pmatrix} = F - \left(T + T_1''\right)\begin{pmatrix} P \\ p_0 \end{pmatrix} \tag{12}$$

(10)式より
$$\left(T + T_1''\right)\begin{pmatrix} P_1'' \\ p_1'' \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} 0 \\ p - p_0 \end{pmatrix} - T_1''\begin{pmatrix} P \\ p_0 \end{pmatrix} \tag{13}$$

(13)式の右辺才1項は不つり合い力 r であり、才2項は変形を拘束するベクトルである。この式より不つり合い力 r は全ケーブルに分配されることが分かる。部材力は次式となる。

$$\begin{pmatrix} P_1 \\ p_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P + P_1'' \\ p_0 + p_1'' \end{pmatrix} \tag{14}$$

以下 p が正になるまでくり返し、n 回目は次式となる。

$$\left(T + \sum_{i=1}^{n} T_i''\right)\begin{pmatrix} P_n'' \\ p_n'' \end{pmatrix} = \left(T + \sum_{i=1}^{n-1} T_i''\right)\begin{pmatrix} 0 \\ p_{n-1}'' \end{pmatrix} - T_n''\begin{pmatrix} P_n + \sum_{i=1}^{n-1} P_i'' \\ p_0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} P_n \\ p_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_n + \sum_{i=1}^{n} P_i'' \\ p_0 + p_n \end{pmatrix} \tag{15}$$

(15)式において、一般に p_n'' は p_{n-1}'' より大きくなることはない。すなわち p_n'' は n を増せばゼロに近づいて行き、p_n は p_0 に等しくなる。実際には p_n が正となった段階で上記のくり返しを打ち切れば良く、また各くり返し計算において、不つり合い力 r は一般にそれほど大きくなく、したがって大変形計算の収束時間は比較的短い。

5. 初期形状決定フローチャートおよび計算例

図2は才1章の理論にしたがった、計算のフローチャートを示したものである。なお本理論で設計条件として与えるのは X および Φ であるが、Φ の数値は把握し難い。よって計算プログラムでは、P を与え、設計条件および解の初期値で与えられた格点座標より近似部材長 L' を計算し、(2)式より Φ を与えている。これにより設計条件において P を正のある数値で与えたならば、計算結果の P は正で、その数値は L'/L 倍である。

計算例として、図3の2次元ケーブルトラスを解析した。この構造の自由度は6、よって未知数は6個選ぶことができる。一方、設計条件として圧縮部材力が生じる可能性のある部材に対してはその部材力を設計条件として表1に与えた。これにより、未知部材力は3個、したがって未知格点座標は3個である。解の初期値は表2に、計算結果は表3に与えた。また各くり返し段階における $\|r\|^2$ および α は表4に与えた。この

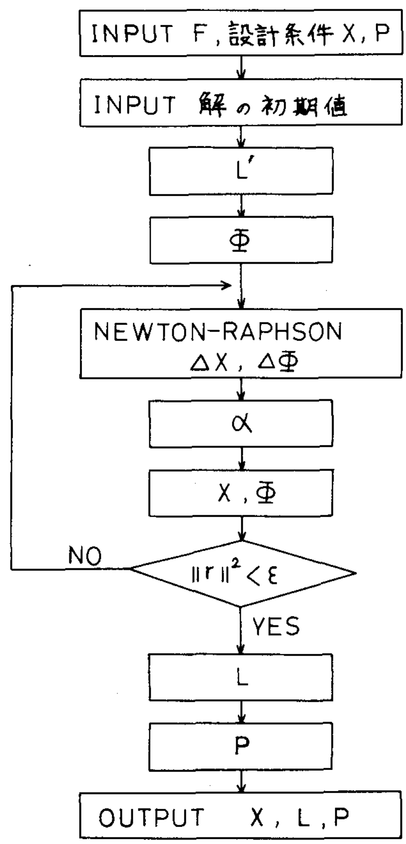

図 2 フローチャート

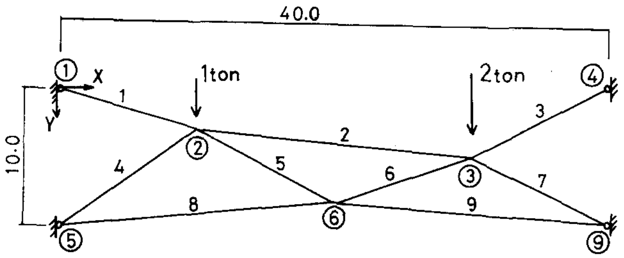

図3　解析モデル　UNIT：m

表1

		設計条件
格点座標	2 X	10.0 m
	2 Y	3.0
	3 X	30.0
部材力	4	3.0 t
	5	3.0
	6	3.0
	7	3.0
	8	10.0
	9	10.0

計算例において、α＝1つまりNewton-Raphson法に対する補足を行なわなかった場合、解の発散がみられた。

6. 結論

才2章の理論における問題として次のことがある。αの採用によって、解の発散はなくなったが、構造によっては解の収束までの計算時間が多くかかる場合がある。よって(3)式の非線形方程式をさらに有効な方法で解く必要があり、現在この点の改善を計っている。一方、収束した解が得られたならば、設計条件を満足したつり合い形状および部材力を得られる。この部材力に対して断面設計を行ない、さらに無応力長を決定することができる。上記のごとく、本理論によれば、従来のモデル実験その他による方法の試行錯誤的要素をなくすることができる。

次に才3章および才4章に述べた方法の問題点は次のとおりである。まず部材断面性状および形状を設定しなければならない。したがって計算結果によっては断面変更、形状変更を必要とする場合も生ずる。一般にケーブル構造は不安定構造であり、これによる変形は才3章の理論で規定することはできない。したがって構造によっては格点座標が目標形状から大きくずれることもあり得る。利点は才3章および才4章における各くり返しの不つり合い力は一般に小さく、したがって比較的短い計算時間で所要の形状および部材力を得ることができる。

表2

		初期値
格点座標	3 Y	5.0 m
	6 X	20.0
	6 Y	8.0
部材力	1	30.0 t
	2	〃
	3	〃

表3

		計算結果
格点座標	3 Y	3.96 m
	6 X	20.11
	6 Y	7.69
部材力	1	53.60 t
	2	51.12
	3	55.09

表4

くり返し数	$\|r\|^2$	α
1	1.01×10^{2}	0.890
2	3.28	1.411
3	8.67×10^{-2}	0.993
4	5.41×10^{-3}	

（参照文献）

1) 波田，新家，広中「エネルギー法によるケーブル構造の解析（才1報）」　土木学会全国大会　昭和46年

2) Buchholdt, "A non-linear deformation theory applied to two dimensions pretensioned cable assembles" Inst. civ. Engrs. '69