

近畿大学理工学部 正員 星 治 雄
 高松工業高専 正員 ○ 春 本 繁

1. ま え が き

吊橋は、ケーブルと補剛桁とをつり材で結合した構造物であり、他の橋りょう構造物に比べて剛性が小さく変形しやすい。吊橋の剛性および変形は、ケーブルの伸び剛性および補剛桁の曲げ剛性によって変化するが、また、ケーブルと補剛桁との結合材であるつり材の形式によっても変化する。

そこで、本研究は、鉛直つり材形式に比べて、変形特性の著しい斜めつり材をもつ吊橋の理論的な一解法を示し、斜めつり材をもつ吊橋の静力学的性質について理論解析を行なった。本解法は、吊橋に生ずるひずみエネルギーおよび吊橋のポテンシャルエネルギーの変化量より吊橋に生ずるエネルギー変化量を求めて、これをエネルギー最小の原理に適用し、斜めつり材をもつ吊橋の基礎方程式を誘導した。なお、エネルギー最小の条件式としては、変分法による条件式を用いた。

2. 基礎方程式の誘導

(1) つり材張力

図-1に示すような斜めつり材をもつ吊橋において、図-2のような変形を考える。つり材に生ずる張力を P_r 、 P_l とすれば

$$P_r = \frac{E_n F_n h(x)}{d(x)^2} \left\{ U_s - U_c + \frac{a_e}{2} U_s' \right\} \quad (1)$$

$$P_l = \frac{E_n F_n h(x)}{d(x)^2} \left\{ U_s - U_c - \frac{a_e}{2} U_s' \right\} \quad (2)$$

となる。

また、 P_r および P_l によりつり材頂点に生ずる水平成分および鉛直成分を P_h 、 P_v とすれば

$$P_h = \frac{E_n F_n a_e^2 h(x)}{2d(x)^3} U_s' \quad (3)$$

$$P_v = \frac{2 E_n F_n h(x)^2}{d(x)^3} (U_s - U_c) \quad (4)$$

となる。

(2) 吊橋に生ずるひずみエネルギー

補剛桁に生ずるひずみエネルギー U_s は、つぎのように表わされる。

$$U_s = \frac{EI}{2} \int_0^L \left(\frac{d^2 U_s}{dx^2} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^x \frac{E_n F_n a_e^2 h(z)}{2 a_n d(z)^3} U_s' dz \cdot U_s'^2 dx \quad (5)$$

第1項は曲げによるものであり、第2項は軸力によるものである。

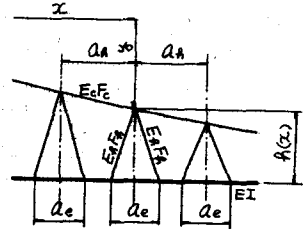


図-1

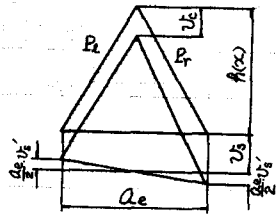


図-2

ケーブルに生ずるひずみエネルギー U_c は、つぎのように表わされる。

$$U_c = \frac{E_c F_c}{8} \int_0^l \frac{(v_c'^2 + 2y'v_c')^2}{(1+y'^2)^{3/2}} dx + \frac{Hw}{2} \int_0^l (v_c'^2 + 2y'v_c') dx \quad (6)$$

第1項は活荷重によるものであり、第2項は死荷重によるものである。また、ケーブルの水平張力 H_x は、つり枝の影響をうけて、つぎのように表わされる。

$$H_x = H_p - \int_0^x \frac{E_a F_a a_e^2 h(\xi)}{2a_a d(\xi)^3} v_s' d\xi \quad (7)$$

つり枝に生ずるひずみエネルギー U_h は、つぎのように表わされる。

$$U_h = \frac{E_a F_a}{a_h} \int_0^l \frac{h(x)^2}{d(x)^3} \left\{ (v_s - v_c)^2 + \frac{a_e^2}{4} v_s'^2 \right\} dx + g_s \int_0^l (v_s - v_c) dx \quad (8)$$

第1項は活荷重によるものであり、第2項は死荷重によるものである。

よって、吊橋に生ずるひずみエネルギー U は、つぎに示すとおりである。

$$U = \frac{EI}{2} \int_0^l \left(\frac{d^2 v_s}{dx^2} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^l \int_0^x \frac{E_a F_a a_e^2 h(\xi)}{2a_a d(\xi)^3} v_s' d\xi \cdot v_s'^2 dx + \frac{E_c F_c}{8} \int_0^l \frac{(v_c'^2 + 2y'v_c')^2}{(1+y'^2)^{3/2}} dx \\ + \frac{Hw}{2} \int_0^l (v_c'^2 + 2y'v_c') dx + \frac{E_a F_a}{a_h} \int_0^l \frac{h(x)^2}{d(x)^3} \left\{ (v_s - v_c)^2 + \frac{a_e^2}{4} v_s'^2 \right\} dx + g_s \int_0^l (v_s - v_c) dx \quad (9)$$

(3) 吊橋に生ずるエネルギー変化量

活荷重載荷による吊橋のポテンシャルエネルギーの変化量 W は、つぎのように表わされる。

$$W = g_s \int_0^l v_s dx + g_c \int_0^l v_c dx + \int_0^l G(x) v_s dx \quad (10)$$

よって、吊橋に生ずるエネルギー変化量 E は、 $E = U - W$ となる。

(4) 基礎方程式

吊橋に活荷重が作用し、吊橋が平衡状態になったとき、吊橋に生ずるエネルギー変化量 E は、最小となる。いま、 $E = \int_0^l F dx$ とおけば、 E が最小となる条件式は、変分法よりつぎのように与えられる。

$$\frac{\partial F}{\partial v_s} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial v_s'} \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\partial F}{\partial v_s''} \right) = 0 \quad (11) \quad \frac{\partial F}{\partial v_c} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial v_c'} \right) = 0 \quad (12)$$

ここで、 F はつぎに示すとおりである。

$$F = \frac{EI}{2} v_s'^2 + \int_0^x \frac{E_a F_a a_e^2 h(\xi)}{4a_a d(\xi)^3} v_s' d\xi \cdot v_s'^2 + \frac{E_c F_c}{8} \frac{(v_c'^2 + 2y'v_c')^2}{(1+y'^2)^{3/2}} + \frac{Hw}{2} (v_c'^2 + 2y'v_c') \\ + \frac{E_a F_a h(x)^2}{a_h d(x)^3} \left\{ (v_s - v_c)^2 + \frac{a_e^2}{4} v_s'^2 \right\} - g_s v_s - g_c v_c - G(x) v_s \quad (13)$$

式(11)、式(12)の条件式に式(13)を代入すると、つぎのようになる。

$$EI \frac{d^4 v_s}{dx^4} - \left[\frac{E_a F_a a_e^2 h(x)^2}{2 a_n d(x)^3} + \int_0^x \frac{E_a F_a a_e^2 h(\xi)}{2 a_n d(\xi)^3} v_s' d\xi \right] \frac{d^2 v_s}{dx^2} - \frac{E_a F_a a_e^2 h(x)}{2 a_n d(x)^3} \left[2d(x)^2 h(x) - 3h(x)^2 h'(x) + d(x)^2 v_s' \right] \frac{dv_s}{dx} + \frac{2E_a F_a h(x)^2}{a_n d(x)^3} (v_s - v_c) = G(x) \quad (14)$$

$$\left[H_w + H_p - \int_0^x \frac{E_a F_a a_e^2 h(\xi)}{2 a_n d(\xi)^3} v_s' d\xi \right] \frac{d^2 v_c}{dx^2} - \frac{E_a F_a a_e^2 h(x)}{2 a_n d(x)^3} v_s \frac{dv_c}{dx} - \frac{E_a F_a a_e^2 h(x) h'(x)}{2 a_n d(x)^3} \frac{dv_s}{dx} + \frac{2E_a F_a h(x)^2}{a_n d(x)^3} (v_s - v_c) + \left[H_p - \int_0^x \frac{E_a F_a a_e^2 h(\xi)}{2 a_n d(\xi)^3} v_s' d\xi \right] \frac{d^2 y}{dx^2} = 0 \quad (15)$$

式(14)は、補剛桁のつり合条件式を示し、式(15)は、ケーブルのつり合条件式を示している。式(14)および式(15)が、斜めつり枝をもつ吊橋の基礎方程式である。ここで、ケーブルの変位 v_c と補剛桁の変位 v_s を等しいと仮定し、ともに v で表わすと、基礎方程式は、一個となりつぎに示すとおりである。

$$EI \frac{d^4 v}{dx^4} - \left[H_w + H_p + \frac{E_a F_a a_e^2 h(x)^2}{2 a_n d(x)^3} \right] \frac{d^2 v}{dx^2} - \frac{3E_a F_a a_e^2 h(x) h'(x)}{8 a_n d(x)^3} \frac{dv}{dx} = G(x) + \left[H_p - \int_0^x \frac{E_a F_a a_e^2 h(\xi)}{2 a_n d(\xi)^3} v' d\xi \right] \frac{d^2 y}{dx^2} \quad (16)$$

ここで、 EI は補剛桁の曲げ剛性、 $E_a F_a$ はつり枝の伸び剛性、 $d(x)$ はつり枝長さ、 $h(x)$ はつり枝高さ、 a_e はつり枝巾、 a_n はつり枝間隔長、 $G(x)$ は活荷重である。

式(16)において、 $a_e = 0$ とすれば、鉛直つり枝をもつ吊橋の基礎方程式と一致する。式(16)の H_p はケーブル方程式より求まる。ケーブル方程式は、鉛直つり枝形式と同様思考よりつぎのように表わされる。

$$\frac{H_p}{E_c F_c} \int_0^l \left(\frac{ds}{dx} \right)^3 dx - \frac{1}{E_c F_c} \int_0^l \int_0^x \frac{E_a F_a a_e^2 h(\xi)}{2 a_n d(\xi)^3} v' d\xi \left(\frac{ds}{dx} \right)^3 dx + \frac{d^2 y}{dx^2} \int_0^l v dx = 0 \quad (17)$$

式(17)より、 H_p はつぎのようになる。ここで、 $E_c F_c$ はケーブルの伸び剛性である。

$$H_p = \frac{E_c F_c}{L_E} \frac{8\gamma}{l^2} \int_0^l v dx + \frac{E_a F_a a_e^2}{2 a_n L_E} \int_0^l \int_0^x \frac{h(\xi)}{d(\xi)^3} v' d\xi \left[1 + \frac{16\gamma^2}{l^4} (l-2x)^2 \right]^{3/2} dx \quad (18)$$

よって、斜めつり枝をもつ吊橋の静的解析は、式(16)と式(18)とを連立させて解けば、求める解が得られる。

3. 数値計算

数値計算は、単径間斜めつり枝をもつ吊橋について、 a_e が10m、7.5m、5m、2.5m、および0mの5通りについて、それぞれ満載荷重、半載荷重について数値計算を行なった。吊橋の断面諸元および荷重は、表-1に示すとおりである。

表-1 吊橋の断面諸元および荷重

支間	500m	垂距	50m
補剛桁の曲げ剛性	0.21126 × 10 ¹¹ kg·m		
補剛桁の死荷重	6000 kg/m		
ケーブルの伸び剛性	0.2289 × 10 ¹⁰ kg		
ケーブルの死荷重	1000 kg/m		
つり枝の伸び剛性	0.4116 × 10 ⁸ kg		
活荷重	2625 kg/m		
つり枝間隔	10m		

斜めつり桁をもつ吊橋の計算結果を示せば、図-3および図-4のとおりである。

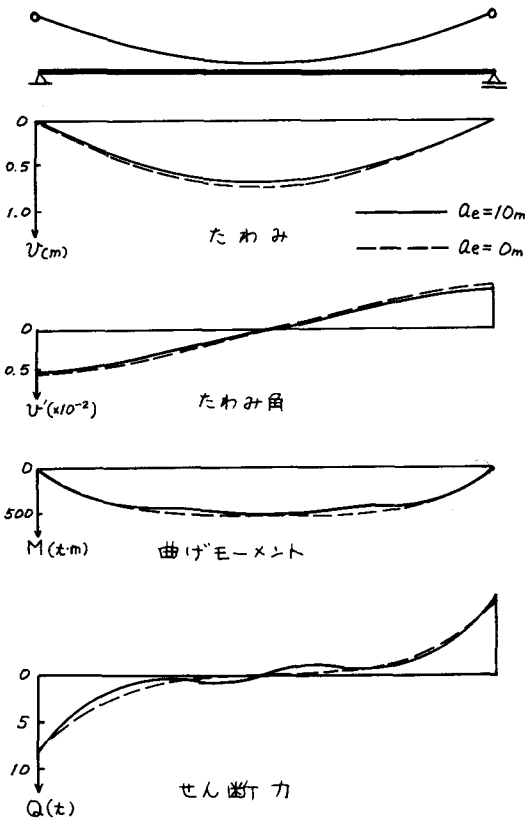


図-3 満載荷重

また、 a_e の変化による補剛桁の最大たわみ、および最大曲げモーメントの変化を示すと図-5、および図-6のとおりである。

4. むすび

計算結果よりつぎのようなことがわかった。

(1) 本研究で示した基礎方程式は、斜めつり桁をもつ吊橋の静定解析に有用であると思われる。

(2) 斜めつり桁をもつ吊橋は、鉛直つり桁をもつ吊橋に比べて、半載荷重に対して、

たわみ、および曲げモーメントが著しく減少する。また、満載荷重については、大差ないが、曲げモーメントおよびせん断力において若干の違いがみられる。

(3) 斜めつり桁の効果は、たわみを減少するとともに、断面力をスパン方向に分布するものと考えられる。

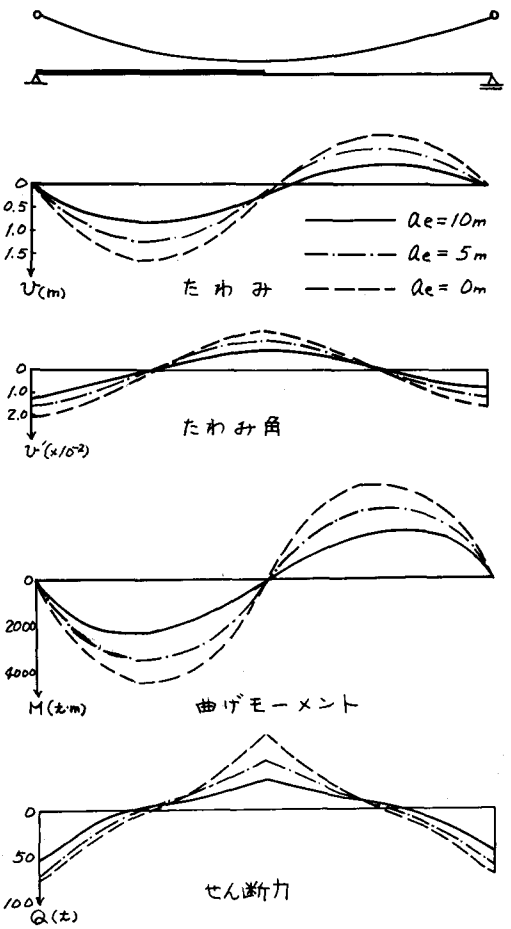


図-4 半載荷重

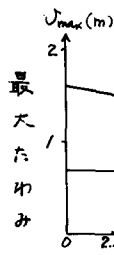


図-5

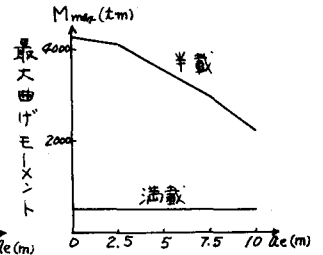


図-6