I-244　変形を考慮した曲線部材の力学的性状に関する基礎的研究

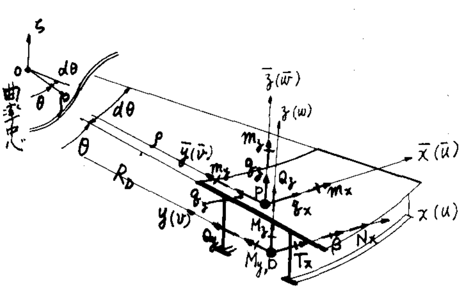
大阪市立大学工学部　正員　○事口寿男
〃　　　〃　　中井博

1. まえがき

変形を考慮した薄肉曲線部材の解析には，波田[1]，遠田[2]，Ojalbo[3]等の研究があげられる。文献1),3)はフレネ・セレーの公式とClebshのつり合い方程式から，文献2)は変形を考慮したつり合い方程式から，曲線部材の基礎方程式を誘導している．しかし，これらの研究では曲線部材を一本の曲棒として解析したものであり，曲率半径方向の広がりを無視している．本文は，曲率半径方向の広がり，および，図心・せん断中心の偏倚を考慮して，まず，変形を考慮した場合のひずみと変位の関係を導く．次に，変分原理によって導かれるつり合い方程式と境界条件を求めて，幾何学的非線形さを考慮した場合の曲線部材の基礎方程式を誘導するものである．

2. ひずみと変位の関係

図－1



図－1は円筒座標系（ρ, θ, s）および，局所直交座標系（$\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$），（x, y, z）を用いて，断面上の変位，断面力，および外力を示したものである。任意点（P）におけるひずみと変位の関係はテンソル解析[7]より計算すると次のようになる。

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \theta} - \frac{1}{\rho}\bar{v} + \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar{v}}{\partial \theta} + \frac{1}{\rho}\bar{u}\right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{u}}{\rho\partial\theta} - \frac{1}{\rho}\bar{v}\right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{w}}{\rho\partial\theta}\right)^2\right\} \quad \cdots\cdots (1)$$

$$\gamma_{\rho\theta} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial \rho} - \left(\frac{\partial \bar{v}}{\rho\partial\theta} + \frac{\bar{u}}{\rho}\right) + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \rho}\left(\frac{\partial \bar{v}}{\rho\partial\theta} + \frac{\bar{u}}{\rho}\right) + \frac{\partial \bar{u}}{\partial \rho}\left(\frac{\partial \bar{u}}{\rho\partial\theta} - \frac{\bar{v}}{\rho}\right) + \frac{\partial \bar{w}}{\partial \rho}\frac{\partial \bar{w}}{\rho\partial\theta} \quad \cdots\cdots (2)$$

$$\gamma_{\theta s} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial s} + \frac{\partial \bar{w}}{\rho\partial\theta} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial s}\left(\frac{\partial \bar{v}}{\rho\partial\theta} + \frac{\bar{u}}{\rho}\right) + \frac{\partial \bar{u}}{\partial s}\left(\frac{\partial \bar{u}}{\rho\partial\theta} - \frac{1}{\rho}\bar{v}\right) + \frac{\partial \bar{w}}{\partial s}\frac{\partial \bar{w}}{\rho\partial\theta} \quad \cdots\cdots (3)$$

$$\varepsilon_\rho = \varepsilon_s = \gamma_{\rho s} = 0 \quad \cdots\cdots (4)$$

3. 任意点（P）のひずみと定点（D）のひずみの関係

任意点(P)の変位量（$\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}, \beta$）を定点（D）の変位量（$u, v, w, \beta$）で示すと次のようになる。

$$\bar{u} \fallingdotseq u - y\Phi_z - z\Phi_y - \theta U_s \cdots (5), \quad \bar{v} \fallingdotseq v - z\beta \cdots (6), \quad \bar{w} \fallingdotseq w + z\beta \cdots (7)$$

ただし，$\Phi_z = \dfrac{dv}{R_D d\theta} + \dfrac{u}{R_D}$，　$\Phi_y = \dfrac{dw}{R_D d\theta}$，　$\theta = \dfrac{d\hat{\theta}}{R_D d\theta} = \left(\dfrac{d\beta}{R_D d\theta} + \dfrac{dw}{R_D^2 d\theta}\right)$，　U_s；そり関数

次に，垂直ひずみε_θは式(1)と(5)～(7)を用いて高次の微小項を省略して定点(D)の変形量で示すと次式を得る。

$$\varepsilon_\theta = \frac{R_D}{\rho}\left[\left(\varepsilon_{x1} - yk_z - zk_y - U_s\psi\right) + \frac{R}{\rho}\left(\varepsilon_{x2} - y\Delta k_z - z\Delta k_y - U_s\Delta\psi\right)\right] = \varepsilon_{\theta1} + \varepsilon_{\theta2} \quad \cdots (8)$$

また，せん断ひずみに対しては，曲げによるせん断ひずみを無視し，式(2)～(3)の2次の項を無視すると，周知のように次式が得られる。

$$\gamma_s = \left\{\frac{R_D}{\rho}r - \rho\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{U_s}{\rho}\right)\right\}\theta \quad \cdots\cdots (9)$$

ここに，1)　1次項におけるひずみ，曲率の変化，および曲げねじり率

$$\varepsilon_{x1}=\frac{du}{R_D d\theta}-\frac{v}{R_D},\quad K_y=\frac{d^2w}{R_D^2 d\theta^2}-\frac{\beta}{R_D},\quad K_z=\frac{d^2v}{R_D^2 d\theta^2}+\frac{du}{R_D^2 d\theta},\quad \psi=\frac{d\theta}{R_D d\theta}=\frac{d^2\beta}{R_D^2 d\theta^2}+\frac{d^2w}{R_D^3 d\theta^2}\quad\cdots\cdots(10)$$

2)　2次項におけるひずみ，曲率の変化，および曲げねじり率

$$\left.\begin{aligned}&\varepsilon_{x2}=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{du}{R_D d\theta}-\frac{v}{R_D}\right)^2+\left(\frac{dv}{R_D d\theta}+\frac{u}{R_D}\right)^2+\left(\frac{dw}{R_D d\theta}\right)^2\right\},\ \Delta K_y=\varepsilon_{x1}K_y+\frac{1}{R_D}\left(\Phi_y\Phi_z-\beta\Phi_z'\right)\\&\Delta K_z=\varepsilon_{x1}K_z+\frac{1}{R_D}\left(\Phi_z^2-\beta\Phi_y'\right),\quad \Delta\psi=\varepsilon_{x1}\psi+\frac{1}{R_D}\theta\Phi_y\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(11)$$

4. 基礎方程式

曲線部材のひずみエネルギー(Π_1)，および外力によるポテンシャルエネルギー(Π_2)は周知のように次式で示される。

$$\Pi_1=\frac{1}{2}\iiint\left\{E(\varepsilon_{\theta 1}+\varepsilon_{\theta 2})^2+G\gamma_s^2\right\}\rho\,d\theta\,dy\,dz\quad\cdots\cdots(12)$$

$$\Pi_2=-\frac{R_D}{\rho}\left(q_x u+q_y v+q_z w+m_x\tilde{\theta}+m_y\Phi_y+m_z\Phi_z+m_w\theta\right)\rho\,d\theta\quad\cdots\cdots(13)$$

式(12),(13)に式(8)～(11)を代入して，$\delta(\Pi_1+\Pi_2)=0$ から得られるつり合い方程式と境界条件式を導くと，それぞれ次のようになる。

つり合い方程式

$$\left.\begin{aligned}&N_x'+\frac{1}{R_D}M_z'+\frac{R_D}{\rho}\left[\Delta N_x\Phi_z+\left\{2\Delta M_z\Phi_z+\Delta M_y\Phi_y+(\Delta M_y\beta)'\right\}/R_D\right]=-R_D q_x-m_z\\&-N_x+\frac{1}{R_D}M_z''-\frac{R_D}{\rho}\left[(\Delta N_x\Phi_z)'+\left\{2(\Delta M_z\Phi_z)'+(\Delta M_y\Phi_y)'+(\Delta M_y\beta)''\right\}/R_D\right]=R_D q_y-m_z'\\&\frac{1}{R_D}M_y''-\frac{1}{R_D}T_x'-\frac{R_D}{\rho}\left[(\Delta N_x\Phi_y)'+\left\{(\Delta M_y\Phi_z)'+(\Delta M_z\beta)''\right\}/R_D\right]=R_D q_z-m_y'-\frac{1}{R_D}m_w'\\&\frac{1}{R_D}M_y+\frac{1}{R_D}T_x'+\frac{R_D}{\rho}\left[\Delta M_y\Phi_z'-\Delta M_z\Phi_y'\right]/R_D=m_x-\frac{1}{R}m_w\end{aligned}\right\}\cdots(14)$$

ただし，$'=d/d\theta$ であり，上式の Dimension はすべて〔kg〕で示している。

境界条件式

$$\left.\begin{aligned}&\{M_z\ M_y\ M_x\ N_x\}^T=\mathbb{K}\left\{K_z+\frac{R_D}{\rho}\Delta K_z\quad K_y+\frac{R_D}{\rho}\Delta K_y\quad \varepsilon_{x1}+\frac{R_D}{\rho}\varepsilon_{x2}\quad \psi+\frac{R_D}{\rho}\Delta\psi\right\}^T\\&T_x=GJ_{TD}\theta-\frac{1}{R_D}M_x'\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(15)$$

$$\{\Delta M_z\ \Delta M_y\ \Delta M_x\ \Delta N_x\}^T=\mathbb{K}\{K_z\ K_y\ \varepsilon_{x1}\ \psi\}^T\quad\cdots\cdots(16)$$

$$\mathbb{K}=\begin{bmatrix}EI_z & EI_{yz} & -EZ_z & EC_z\\ EI_{yz} & EI_y & -EZ_y & EC_y\\ -EC_z & EC_y & 0 & EC_w\\ -EZ_z & -EZ_y & EF & 0\end{bmatrix}\quad\cdots\cdots(17)$$

$J_{TD}, I_z, I_y\cdots$ は定点(D)に関する断面常数で要易に計算できるものである。

式(15)～(17)を式(14)に代入すると，定点(D)の変形に関する幾何学的非線形さを考慮した弾性方程式が得られる。また，式(14)および式(15)において，$\Delta M_z, \Delta M_y, \Delta M_x, \Delta N_x$ と2次項のひずみ，曲率，ねじり率を消去すれば，微小変位理論の場合のつり合い方程式と境界条件式が得られる。

講演発表当日，詳細に内容を発表する次第であります。

参考文献　1) 波田；Trans. of JSCE No. 155, 1968　2) 遠田；Proceeding of JSCE No. 199, 1972
3) Ojalbo M.; Proceeding of ASCE EM5, 1968　4) 小松，中井；Trans. of JSCE No. 136, 1966
5) 小松，中井；Proceeding of JSCE No. 174, 1970　6) 深沢；Trans of JSCE No. 110, 1964
7) Washizu K.; Variational Method in Elasticity and Plasticity, Pergamon Press, 1968