

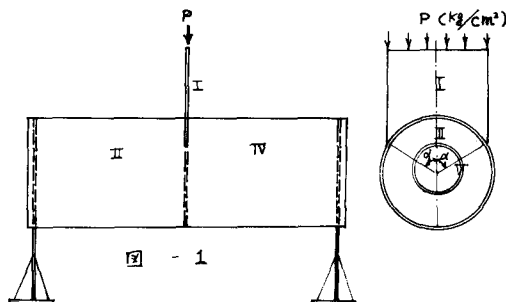
東京大学 正員 奥村敏恵
 埼玉大学 正員 秋山茂興
 埼玉大学 正員 渡島良吉

序 円形断面脚柱を有するラーメン隅角部において横梁フランジを受ける円筒をダイヤフラムで補強する際その補強効果が問題になる。ここでは円筒脚柱がはりフランジのみり力を受けるとしてその補強効果を調べることにする。

解析方法

図-1に示されるモデルを元素次の手順により解析を行う。

(1) 荷重板(I), パイプ(II, IV), ダイヤフラム(III), スチフナーリング(V)の各構成要素に分離し、そこに作用する荷重を静定力、不静定力に分離して要素の解析解を求める。



(2) 解析解の内部に含まれる未知定数は $raind$ -
 -*matching* の手法により境界線上、および接合線上の有限要素境界条件、力の釣合条件、変形(ひずみ)の連続条件を満足するように定める。

図-2の構成要素の分離と境界に作用する荷重

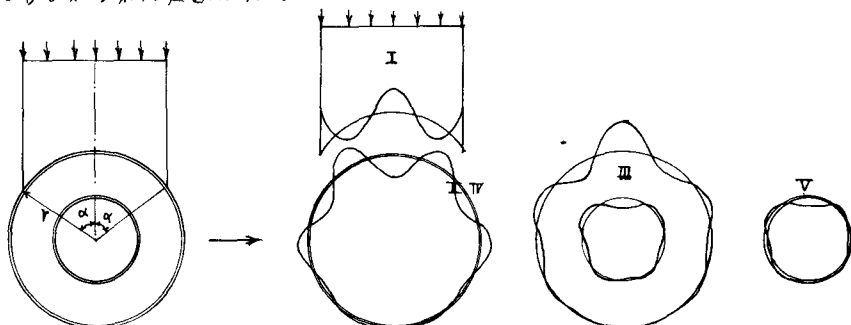


図-2 構成要素の分離と境界に作用する荷重

(3) 最小自乗法の手法により解の精度を高める。

構成要素の分離

図-2のように要素I, II, III, IV, Vを切り離しそこに付く荷重状態を考える。ダイヤフラム(III)とスチフナーリング(V)には不静定力としての自己釣合荷重のみが作用するが、荷重板とパイプに付く荷重は静定力と不静定力とに分離して考える。荷重板からパイプへの静定力としての荷重は荷重板上面の荷重がそのままパイプへ伝えられるとして $-\alpha \leq \theta \leq \alpha$ の区間で次の荷重が作用する。

法線方向荷重 $P_r = -\frac{P \cdot h^2}{2} (1 + \cos 2\theta)$,

接線方向荷重 $P_\theta = \frac{P \cdot h^2}{2} \sin 2\theta$ 、 h : 荷重板の板厚。

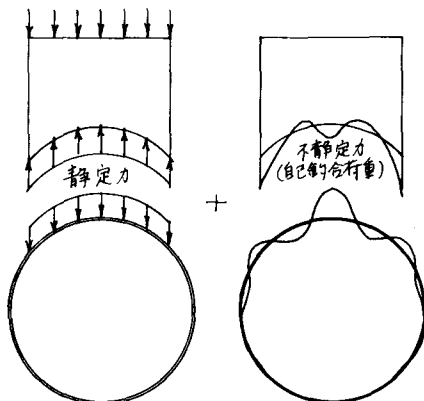


図-3 静定力、不静定力の分離

これに $-\pi \leq \theta \leq \pi$ の同じフーリエ級数の展開方向は法線方向、接線方向荷重として P_r^s, P_θ^s が得られる

$$P_r^s = -\frac{Ph^2}{2\pi} \left[\left(\alpha + \frac{1}{2} \sin 2\alpha \right) + \left(3 \sin \alpha + \frac{\sin 3\alpha}{3} \right) \cos \theta + \left(\sin 2\alpha + \alpha + \frac{1}{4} \sin 4\alpha \right) \cos 2\theta + \sum_{m=3}^{\infty} \left\{ \frac{2 \sin m\alpha}{m} + \frac{\sin(m+2)\alpha}{m+2} + \frac{\sin(m-2)\alpha}{m-2} \right\} \cos m\theta \right]$$

$$P_\theta^s = \frac{Ph^2}{2\pi} \left[\left(\sin \alpha - \frac{\sin 3\alpha}{3} \right) \sin \theta + \left(\alpha - \frac{\sin \alpha}{4} \right) \sin 2\theta + \sum_{m=3}^{\infty} \left\{ \frac{\sin(m-2)\alpha}{m-2} - \frac{\sin(m+2)\alpha}{m+2} \right\} \sin m\theta \right]$$

この P_r^s, P_θ^s の荷重のうち $\cos \theta, \sin \theta$ で表わされる頂点 $-\pi \leq \theta \leq \pi$ の同じ積分すれば次のようになる

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left[-\frac{Ph^2}{2\pi} \left(3 \sin \alpha + \frac{\sin 3\alpha}{3} \right) \cos \theta + \frac{Ph^2}{2\pi} \left(\sin \alpha - \frac{\sin 3\alpha}{3} \right) \sin \theta \right] r d\theta = 2Prh^2 \sin \alpha$$

これは荷重板に作用する荷重の合力である。これより $\cos \theta, \sin \theta$ の頂点に与える応力状態は、はり理論としての解を表わす。(実際には $\cos \theta, \sin \theta$ の頂点の荷重によって擾乱応力は与えるがその場合無視し得る程小さい) こうしてパイプに伝わる静定力は、はり理論に相当する応力状態を表わす $\cos \theta, \sin \theta$ の項と断面の変形をまじらせる自己釣合荷重である $\cos n\theta, \sin n\theta$ ($n=0, 2, 3, \dots$) の項に分離して考えることが出来る。

境界条件、および接合条件

パイプの応力状態は静定力と不静定力とに分けて考えることに静定力は、はり理論に相当する解を表わす部分と擾乱応力とに分けて考えることが出来る。以下は擾乱応力状態について考えるのは良いので図-1のモデルを図-4 のように無限に長いパイプとして解析する。

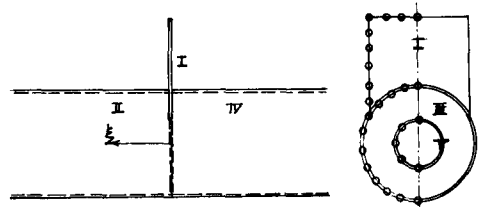


図-4 無限長パイプ

今、この要素 I, II, III, IV, V の応力、変形状態を表わす解析解の内に含まれる未知定数を定めたい。境界、および接合線上の有限要素境界条件、接合条件を満足させるのであるが、これは有限要素法の Union 分割法において各要素の変形状態を境界点で表わし、その境界線の連続条件を満足させてゆく手法に似ているが、各要素に解析解を用いることにより精度を向上させることが出来る。要素の寸法の変更による応力集中状態の変化を検討するのが容易になる。

荷重板、パイプ、ダイヤフラム、スチフナーリングの解析解に含まれる未知定数

- 荷重板 $A_n^I, B_n^I, C_n^I, D_n^I, E_n^I, F_n^I$ ($n=0, 2, 3, \dots$)
- パイプ $Re(A_n^{II}), Im(A_n^{II}), Re(B_n^{II}), Im(B_n^{II})$ ($n=0, 2, 3, \dots$), (A_n^{II}, B_n^{II} は複素数)
- ダイヤフラム $A_n^{III}, B_n^{III}, C_n^{III}, D_n^{III}$ ($n=0, 2, 3, \dots$)
- スチフナーリング P_n^V, Q_n^V ($n=0, 2, 3, \dots$)

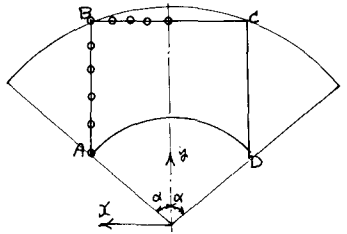
この16の未知定数に対し2次の16つの境界条件、および連続条件が残ります。

a) 荷重板の境界条件

荷重板の解は扇形板に対して求めたものである。実際の要素 [I] は ABCD の形をしてゐる。この荷重板の解は静定力と不静定力とに分けて考えるのである。側面 AB と上辺 BC とに不静定力(擾乱応力)に対して2次の4個の境界条件が与えられる。

AB 辺上で $\sigma_n = 0$ — (1) BC 辺上で $\sigma_\theta = 0$ — (3)

$\tau_{\theta n} = 0$ — (2) $\tau_{\theta\theta} = 0$ — (4)



α, β はそれぞれ x 方向, y 方向の死力成分であり β は x 平面のせん断死力である

b) 接合条件

接合条件として力の釣合条件と変形の連続条件が満足されなければならない。この場合力の釣合条件は不静定力(攪乱死力)のみの力の釣合を考慮すれば良い。

(A) 力の釣合条件(不静定力について)

パイプ間上で

$$\text{法線方向力}; Q_{vv}^I + 2Q_{vn}^II - Q_{vv}^III = 0 \quad (5)$$

$$\text{接線方向力}; Q_{vt}^I + 2Q_{vt}^II - Q_{vt}^III = 0 \quad (6)$$

スチフナーリング上で

$$\text{法線方向力}; Q_{vv}^{III} - Q_{vv}^V = 0 \quad (7)$$

$$\text{接線方向力}; Q_{vt}^{III} - Q_{vt}^V = 0 \quad (8)$$

(B) 変形の連続条件(静定力 + 不静定力による変形)

パイプ間上で

$$\text{接線方向ひずみ}; \epsilon_{\theta\theta}^I = \epsilon_{\theta\theta}^II \quad (9)$$

$$\epsilon_{\theta\theta}^II = \epsilon_{\theta\theta}^III \quad (10)$$

$$\text{曲率変化}; \kappa^I = \kappa^II \quad (11)$$

$$\kappa^II = \kappa^III \quad (12)$$

スチフナーリング上で

$$\text{接線方向ひずみ}; \epsilon_{\theta\theta}^III = \epsilon_{\theta\theta}^V \quad (13)$$

$$\text{曲率変化}; \kappa^III = \kappa^V \quad (14)$$

c) パイプの対称条件

II, IV のパイプは左右に無限に伸びているので死力および変形状態は対称となり。次の2つの条件が満たされなければならない。

$$\frac{\partial w}{\partial \theta} = 0 \quad (15), \quad u = 0 \quad (16), \quad (\text{ } \theta \text{ 0; パイプ径方向死力 } u; \text{ パイプ軸方向変位})$$

d) 荷重板の不静定力の自己釣合条件

パイプに関して、不静定力は $\cos n\theta, \sin n\theta$ ($n=0, 2, 3, \dots$) の項で表わされる。これらの項はそれぞれ自己釣合力系とすべきの問題は無いが荷重板に対する解は $\cos n\theta, \sin n\theta$ (ただし $n' = \frac{\partial n}{\partial \alpha}$, $n=0, 2, 3, \dots$) の和として与えられ、これは自己釣合力系とはならないのでパイプの接合線上において不静定力が自己釣合力系となるように次の条件をつけ加えなければならない。

$$Y = \int_{-\alpha}^{\alpha} (-\sigma_r \cos \theta + T_{\theta\theta} \sin \theta) r d\theta = 0$$

最小自乗法の手法により解の精度を高める。

境界条件、死力の釣合条件、変形の連続条件、さらに対称の条件を境界条件として接合線上の有限個の点で満足させ、さらに1個の自己釣合条件を加えた条件式を次のようにマトリックス形式で表わす。

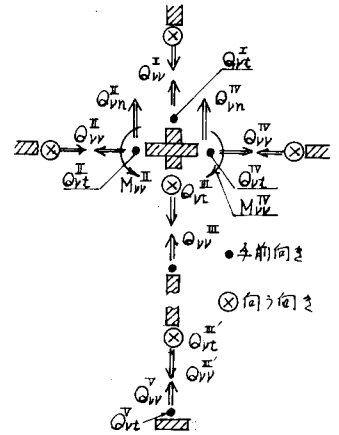
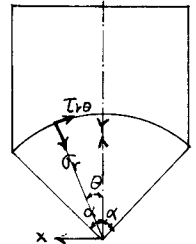


図-5 接合部での力の釣り合い



$$AMN X_N = B_M, \quad AMN : M \text{ 行 } N \text{ 列の係数マトリックス}, \quad X_N : \text{各要素に含まれる } N \text{ 個の未知数}$$

$$B_M : \text{荷重形状項}$$

ここで M は条件式の総数を表し、未知定数の数 N より多くとす。このままではこの連立方程式の解は不定にたつので、上式の左辺から右辺を引いた値を誤差 (V_M) とし、この誤差の自乗の和が最小になる X_N の値を定めることとする。

$$V_M = AMN X_N - B_M$$

$$V_M^T = (AMN X_N - B_M)^T (AMN X_N - B_M)$$

$$\frac{\partial V_M^T}{\partial X_N} = I AMN^T AMN X_N + X_N^T AMN^T AMN I - I AMN^T B_M - B_M^T AMN I = 0$$

$AMN^T AMN$ は対称マトリックスとたつことを考慮すれば上式は次のようにたつ

$$AMN^T AMN X_N = AMN^T B_M$$

$$\text{ここで } AMN^T AMN = C_{NN}, \quad AMN^T B_M = D_N \text{ とすれば}$$

$$C_{NN} X_N = D_N$$

上式より X_N を定めれば良い。

この最小自乗法による方法はフーリエ解析法と同じことを意味している。

まとめ

本文に示した解析法は有限要素法の上巻と考へようとするが各要素に解析解を用いているので応力集中の緩和がたつ際にはより有効な方法となる。長さ l の要素の解が n 角級数の和の形で与えられているので、境界および接合線での discrete な半境界条件、接合条件を含めるときに連続変数の位置およびその数が問題となる。この解析法ではパイプの乱力状態を静定力と不静定力とに分け、ついでに静定力を用いて理論の解に相当する項と、攪乱力状態を表わす項とに分け、各々をそれぞれより図-1 のモデルを図-4 の無限長パイプのモデルに置き換えて計算することとたつことを示した。

ここで図-1 のモデルにおいてパイプ端の部分に注目して、各々のパイプフレームの補強効果を調べる際には、片側に無限に伸びる半無限長のパイプとして解析をすれば良い。この際には (5), (6) 式の Q_{pn}^{II} , Q_{pn}^{III} をそれぞれ Q_{pn}^{II} , Q_{pn}^{III} に置き換える。また (15), (16) 式の対称条件がわかりにパイプ端部で $u = v = w = 0$ かつ $M_x = 0$ 。パイプ軸方向の N_x を零に置けば良い。

プログラムの組立際には Q_{pn}^{II} , Q_{pn}^{III} , Q_{pn}^{IV} , ... 等をそれぞれ一つの要素と考へれば有限要素法において剛性マトリックスを作るのと同じように係数マトリックス AMN を作ることもたつ。このパイプ端部の補強効果を計算する際には、要素 $\frac{2l}{3}$ の u をそれぞれ M_x , N_x の項に置き換えておけば良い。

参考文献

1. Novozhilov : Thin Shell Theory
2. Chernyshin : Linear Theory of Shells
3. 奥村、徳山、西野 : 荷重板を適して局部荷重を受ける補強パイプの乱力解析

昭和44年土木学会年次講演会