I-208 ランダム固有値問題(自由振動)の解析*

武蔵工業大学 土木工学科 正員 星谷 勝

1. 目的 N自由度系の自由振動方程式は, $\underset{\sim}{M}\ddot{\underline{X}} + \underset{\sim}{K}\underline{X} = 0$ で与えられるが，これは次に示すような一般的な固有値問題の固有値及び固有函数を求める問題に還元される。

$$\omega^2 \underset{\sim}{M}\underline{X} = \underset{\sim}{K}\underline{X} \tag{1}$$

ここで $\underset{\sim}{M}$ は $N\times N$ の質量マトリックス，$\underset{\sim}{K}$ は $N\times N$ の剛性マトリックス，ω^2 は固有値(自由振動の固有円振動数の2乗)及び $\underline{X}$ は ω に対応する固有函数(振動モード)である。本論文では $\underset{\sim}{M}$ と $\underset{\sim}{K}$ との要素が確率量の場合を解析する方法を扱うのであって ω と $\underline{X}$ も確率量となる。これは一般に,ランダム固有値問題と呼ばれるテーマであり，弾性安定問題等もこれに準じて扱われよう。連続体の固有値問題はすでに論文1及び2で発表したので今回はN自由度を有する剪断バリの自由振動を考える。

2. 問題及び解法 弾性剪断梁の非減衰自由振動は(1)式によって与えられる。ここで $\underset{\sim}{M}$ と $\underset{\sim}{K}$ は次に示すマトリックスで与えられる。

$$\underset{\sim}{M} = \begin{bmatrix} M_1 & & & & \\ & M_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & M_i & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & M_N \end{bmatrix} \qquad \underset{\sim}{K} = \begin{bmatrix} K_1+K_2, & -K_2 & & & \\ -K_2, & K_2+K_3, & -K_3 & & \\ & \ddots & & & \\ & -K_i, & K_i+K_{i+1}, & -K_{i+1} & \\ & & \ddots & & \\ & & & -K_N, & K_N \end{bmatrix} \tag{2),(3}$$

仮定(1). 確率量 M_i と K_i ; $i=1,2,\cdots,N$ は実際には確定的な平均値 m_i と k_i, と小さな確率変動量 α_i と β_i との和で与えられるとする。すなわち

$$M_i = m_i + \alpha_i \quad , \quad K_i = k_i + \beta_i \tag{4),(5}$$

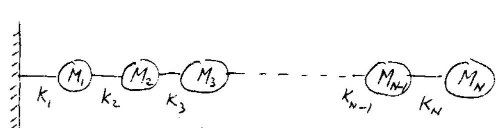
ここで α_i, β_i は平均値零で分散値は小さいとする。

仮定(2). 相関係数(Coefficient of Correlation)は次式で与えられるものとする。

$$\left.\begin{aligned} \rho_{\alpha\alpha} &= E[\alpha_r\alpha_s]/\sigma_{\alpha_r}\sigma_{\alpha_s} = \exp\{-A_1|r-s|\} \\ \rho_{\beta\beta} &= E[\beta_r\beta_s]/\sigma_{\beta_r}\sigma_{\beta_s} = \exp\{-A_2|r-s|\} \\ \rho_{\alpha\beta} &= E[\alpha_r\beta_s]/\sigma_{\alpha_r}\sigma_{\beta_s} = B_1\exp\{-A_3|r-s|\} \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

ここで σ は標準偏差，$E[\ ]$ は期待値である。$A_1\sim A_3$ は定数，B_1 は0と1との間の定数である。A_i は相関曲線の形を支配する定数であり,相関の度合に応じて決定されるものである。当然ながら近い2点間に於ける α_r と α_s とは遠い2点間の相関度より大きいと思われるので,(6)式に示される形はそれなりに意味があると考えられる。

なお本論文で扱われる弾性剪断梁は右図の如くである。



弾性剪断梁

* 本報告は1971年9月ホンコン大学にて行われた Conf. on Applications of Stat. and Prob. to Soil and Struct. Engineering で発表された一部を取りまとめたものである。詳細はこれを参照されたい。
M. HOSHIYA, "Vibration of Elastic Shear Beam with Random Parameters No. 5/5

固有値問題の解を次のように仮定する。すなわち $\underline{X}$ の i 番号の要素を $x_i \cong x_{0i} + \sum_{r=1}^{N}\sum_{s=1}^{\infty}(x_{1irs}\alpha_r^s + x_{2irs}\beta_r^s)$ 及び $\omega \cong \omega_0 + \sum_{r=1}^{N}\sum_{s=1}^{\infty}(\omega_{1rs}\alpha_r^s + \omega_{2rs}\beta_r^s)$ 一次の項のみを用いて高次の項は小さいので無視することにすれば，次式のように近似出来よう（線形化）.

$$x_i \cong x_{0i} + \sum_{r=1}^{N}(x_{1ir}\alpha_r + x_{2ir}\beta_r) \tag{7}$$

$$\omega \cong \omega_0 + \sum_{r=1}^{N}(\omega_{1r}\alpha_r + \omega_{2r}\beta_r) \tag{8}$$

(7)(8)式を(1)式に代入すれば，次の一連の方程式を得る.

$$-\omega_0^2 \underset{\sim}{M}_0 \underline{X}_{0i} + \underset{\sim}{K}_0 \underline{X}_{0i} = 0 \tag{9}$$

$$-\omega_0^2 \underset{\sim}{M}_0 \underline{X}_{1ir} + \underset{\sim}{K}_0 \underline{X}_{1ir} = 2\omega_0\omega_{1r}\underset{\sim}{M}_0 \underline{X}_{0i} + \omega_0^2 \underset{\sim}{D}\,\underline{X}_{0i} \tag{10}$$

$$-\omega_0^2 \underset{\sim}{M}_0 \underline{X}_{2ir} + \underset{\sim}{K}_0 \underline{X}_{2ir} = 2\omega_0\omega_{2r}\underset{\sim}{M}_0 \underline{X}_{0i} + \underset{\sim}{E}\,\underline{X}_{0i} \tag{11}$$

ここで

$$\underset{\sim}{M}_0 = \begin{bmatrix} m_1 & & & & \\ & m_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & m_i & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & m_N \end{bmatrix}, \quad \underset{\sim}{K}_0 = \begin{bmatrix} k_1+k_2, & -k_2 & & & \\ -k_2, & k_2+k_3, & -k_3 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & -k_i, & k_i+k_{i+1}, & -k_{i+1} & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & -k_N, & k_N \end{bmatrix}, \quad \underline{X}_{0i} = \begin{bmatrix} x_{01} \\ x_{02} \\ \vdots \\ x_{0i} \\ \vdots \\ x_{0N} \end{bmatrix}$$

$$\underline{X}_{1ir} = \begin{bmatrix} x_{11r} \\ x_{12r} \\ \vdots \\ x_{1ir} \\ \vdots \\ x_{1Nr} \end{bmatrix}, \quad \underline{X}_{2ir} = \begin{bmatrix} x_{21r} \\ x_{22r} \\ \vdots \\ x_{2ir} \\ \vdots \\ x_{2Nr} \end{bmatrix}, \quad \underset{\sim}{D} = \begin{bmatrix} \delta_{1r} & & & & \\ & \delta_{2r} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \delta_{ir} & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & \delta_{Nr} \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{E} = \begin{bmatrix} -\delta_{1r}-\delta_{2r}, & \delta_{2r} & & & \\ \delta_{2r}, & -\delta_{2r}-\delta_{3r}, & \delta_{3r} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & \delta_{ir}, & -\delta_{ir}-\delta_{i+1,r}, & \delta_{i+1,r} & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \delta_{Nr}, & -\delta_{Nr} \end{bmatrix}$$

(9)式は確定量のみの固有値問題であるから解は簡単に得られよう。(9)式のN個の円振動数を$(\omega_0)_1$, $(\omega_0)_2$, $\cdots (\omega_0)_j \cdots (\omega_0)_N$ とし，それに対応する振動モードを $(\underline{X}_{0i})_1$, $(\underline{X}_{0i})_2$, $\cdots (\underline{X}_{0i})_j \cdots$, $(\underline{X}_{0i})_N$ とする.

(10)式の前方に倒置マトリックス $\underline{X}_{0i}^T$ を乗ずると

$$(-\omega_0^2 \underline{X}_{0i}^T \underset{\sim}{M}_0 + \underline{X}_{0i}^T \underset{\sim}{K}_0)\underline{X}_{1ir} = 2\omega_0\omega_{1r}\underline{X}_{0i}^T \underset{\sim}{M}_0 \underline{X}_{0i} + \omega_0^2 \underline{X}_{0i}^T \underset{\sim}{D}\,\underline{X}_{0i}$$

両辺の倒置マトリックスを取れば

$$\underline{X}_{1ir}^T(-\omega_0^2 \underset{\sim}{M}_0^T \underline{X}_{0i} + \underset{\sim}{K}_0^T \underline{X}_{0i}) = 2\omega_0\omega_{1r}\underline{X}_{0i}^T \underset{\sim}{M}_0^T \underline{X}_{0i} + \omega_0^2 \underline{X}_{0i}^T \underset{\sim}{D}^T \underline{X}_{0i}$$

$\underset{\sim}{M}_0$, $\underset{\sim}{K}_0$, $\underset{\sim}{D}$ は対称マトリックスなので，その倒置マトリックスは $\underset{\sim}{M}_0$, $\underset{\sim}{K}_0$, $\underset{\sim}{D}$ と同一である。従って上式は $\underline{X}_{1ir}^T(-\omega_0^2 \underset{\sim}{M}_0 \underline{X}_{0i} + \underset{\sim}{K}_0 \underline{X}_{0i}) = 2\omega_0\omega_{1r}\underline{X}_{0i}^T \underset{\sim}{M}_0^T \underline{X}_{0i} + \omega_0^2 \underline{X}_{0i}^T \underset{\sim}{D}\,\underline{X}_{0i}$

左辺は(9)式より零となるから，結局，未定の ω_{1r} は次式により計算される.

$$\omega_{1r} = -\frac{\omega_0 \underline{X}_{0i}^T \underset{\sim}{D}\,\underline{X}_{0i}}{2\underline{X}_{0i}^T \underset{\sim}{M}_0 \underline{X}_{0i}} \qquad \text{又は } \underbrace{j\text{ 番目の要素は}}_{\text{円振動数に対応する}} (\omega_{1r})_j = -\frac{(\omega_0)_j (\underline{X}_{0i}^T)_j \underset{\sim}{D} (\underline{X}_{0i})_j}{2(\underline{X}_{0i}^T)_j \underset{\sim}{M}_0 (\underline{X}_{0i})_j} \tag{12}$$

同様にして(11)式を変形すれば

$$\omega_{2r} = -\frac{\underset{\sim}{X}_{oi}^T \underset{\sim}{E} \underset{\sim}{X}_{oi}}{2\omega_o \underset{\sim}{X}_{oi}^T \underset{\sim}{M}_o \underset{\sim}{X}_{oi}}$$

又は j 番目の円振動数に対応する要素は $(\omega_{2r})_j = -\frac{(\underset{\sim}{X}_{oi}^T)_j \underset{\sim}{E} (\underset{\sim}{X}_{oi})_j}{2(\omega_o)_j (\underset{\sim}{X}_{oi}^T)_j \underset{\sim}{M}_o (\underset{\sim}{X}_{oi})_j}$ (13)

(12), (13) 式を用いて，ランダム固有値問題 (1)式の解は次式で与えられる。

$$\omega_j \cong (\omega_o)_j + \sum_{r=1}^{N} \left\{ (\omega_{1r})_j \alpha_r + (\omega_{2r})_j \beta_r \right\} \tag{14}$$

従って期待値は $E[\omega_j] \cong (\omega_o)_j$ (15)

分散値は

$$\begin{aligned} var[\omega_j] &= E[\omega_j^2] - E[\omega_j]^2 \\ &\cong \sum_{r=1}^{N} \sum_{s=1}^{N} \{ (\omega_{1r})_j (\omega_{1s})_j E[\alpha_r \alpha_s] + (\omega_{2r})_j (\omega_{2s})_j E[\beta_s \beta_r] \\ &\qquad + 2(\omega_{1r})_j (\omega_{2s})_j E[\alpha_r \beta_s] \} \end{aligned} \tag{16}$$

ここで(16)式の右辺には(6)式の仮定を導入することにより計算される。

勿論，もしも α_r と α_s が $r \neq s$ のときに独立，β_s と β_r も同様に独立，且つ α_r と β_s は如何なる場合にも独立であれば (16)式はさらに簡単となり，

$$var[\omega_j] \cong \sum_{r=1}^{N} \left\{ (\omega_{1r})_j^2 \sigma_{\alpha_r}^2 + (\omega_{2r}) \sigma_{\beta_r}^2 \right\} \tag{17}$$

3．上記解法の検討　上記の解法は(1)式の固有値及び固有函数を小さな確率変量 α_i, β_i の多項式として展開した形を仮定し，且つ1次項までを取り高次項を無視することにより線形化を行ったわけである。従って α_i, β_i が小さな量である場合には，その近似解の精度もよいと思われるが，α_i, β_i が大きな値の場合には，厳密解とかけ離れた結果となろう。ここでは数値シミュレーション法により厳密解を推定，且つ本解法の検討を考える。この方法は(1)式の確率量 α_i, β_i を有するマトリックス $\underset{\sim}{M}$ と $\underset{\sim}{K}$ のサンプルを数多く作り出し，各 $\underset{\sim}{M}, \underset{\sim}{K}$ 値に対応する(1)式の固有値 ω を求める。次にこの一組の ω 値の平均値及び分散値を求め，サンプル数が大きい場合には，この値が厳密解に近づくとする方法である。従って $\underset{\sim}{M}, \underset{\sim}{K}$ の要素に含まれる α_i, β_i ; $i=1,2,\cdots,N$ なる確率量を平均値 0 で且つ (6)式を満足するように generate する方法を考えればよい。固有値の平均及び分散値を求めるのが目的であるから，α_i, β_i の確率分布函数は任意に仮定してもよい。

初めに (6)式を用いて，次に示す $2N \times 2N$ の相互相関マトリックス $\underset{\sim}{H}$ を作る。

$$\underset{\sim}{H} = \left[\begin{array}{c|c} \underset{r,s=1,\cdots,N}{E[\alpha_r \alpha_s]} & \underset{r,s=1,2,\cdots,N}{E[\alpha_r \beta_s]} \\ \hline \underset{r,s=1,2,\cdots,N}{E[\alpha_r \beta_s]} & \underset{r,s=1,2,\cdots,N}{E[\beta_r \beta_s]} \end{array} \right] \quad ; \ 2N \times 2N \ \text{マトリックス} \tag{18}$$

$\underset{\sim}{H}$ に於いて対角線上の要素は α_i, β_i の分散値であり，非対角線要素は互の相関を示す共分散値となっている。　次に 互に独立な平均値 0 且つ分散値 1 の正規分布の 2N 個の要素より成るベクトル $\underset{-}{A}$ を generate する。すなわち

$$\underset{-}{A} = \{ a_1, a_2, \cdots, a_N, b_1, b_2, \cdots, b_N \} \tag{19}$$

次にこの $\underset{-}{A}$ を線形変換することにより (18)式を満足する α_i, β_i なる確率量を求めることを考える。

線形変換子として

$$\underset{\sim}{C} = \begin{bmatrix} C_{11}, & & \\ C_{21}, C_{22} & & \\ \vdots & \ddots & \\ C_{2N,1}, C_{2N,2}, & \cdots & C_{2N,2N} \end{bmatrix} \tag{20}$$

従って　$\underset{-}{B} = \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_N, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_N\} = \underset{\sim}{C}\underset{-}{A}$　となるから　(21)

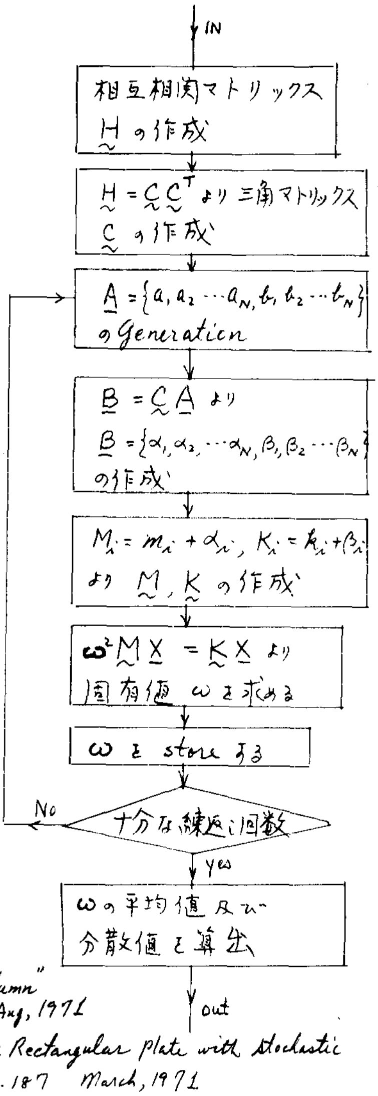
$$\underset{-}{B}\underset{-}{B}^T = \underset{\sim}{C}\underset{-}{A}\underset{-}{A}^T\underset{\sim}{C}^T \qquad \therefore \quad E[\underset{-}{B}\underset{-}{B}^T] = \underset{\sim}{C}E[\underset{-}{A}\underset{-}{A}^T]\underset{\sim}{C}^T$$

ここで $E[\underset{-}{B}\underset{-}{B}^T] = \underset{\sim}{H}$，$E[\underset{-}{A}\underset{-}{A}^T] = unit\ matrix$　であるから，結局，$\underset{\sim}{H} = \underset{\sim}{C}\underset{\sim}{C}^T$　(22)

従って $\underset{\sim}{H}$ は実数の対称マトリックスであり，もし(22)式を満足する三角マトリックス $\underset{\sim}{C}$ が解ければ(21)式より $\underset{-}{B} = \{\alpha_1, \alpha_2 \cdots, \alpha_N, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_N\}$ が求まるのである。

シミュレーション法による解法のフローチャートを示す。→

ランダム固有値問題
（数値シミュレーション）



4．例題　8階建ビルを弾性剪断梁として計算を行った。

Input Data 及び計算結果を下に示す。

センだん梁モデルのデーター

i	Mass		Spring	
8	480 kips ($= 1.25 \frac{kips\text{-}sec^2}{in}$)	$\sigma_{\alpha_i} = 1.25 \times 10^{-2}$	$k_i = 600 \frac{kips}{in}$	$\sigma_{\beta_i} = 6$
7	520 (= 1.35)	1.35×10^{-2}	800	8
6	560 (= 1.46)	1.46	1000	10
5	600 (= 1.56)	1.56	1200	12
4	640 (= 1.66)	1.66	1400	14
3	680 (= 1.77)	1.77	1600	16
2	720 (= 1.87)	1.87	1800	18
1	760 (= 1.98)	1.98	2000	20

円振動数 ω	平均値 $E[\omega]$	分散値 σ^2
ω_1	0.3538×10^2 rad/sec	0.1057×10^{-1} $(\text{rad/sec})^2$
ω_2	0.2201×10^3	0.4397
ω_3	0.5588×10^3	0.2877×10
ω_4	0.1007×10^4	0.9356×10
ω_5	0.1506×10^4	0.2156×10^2
ω_6	0.2020×10^4	0.3967×10^2
ω_7	0.2579×10^4	0.7191×10^2
ω_8	0.3234×10^4	0.1463×10^3

論文1. M. Hoshiya & H.C. Shah, "Free Vibration of Stochastic Beam-Column" Proc. of EM, ASCE Aug, 1971

論文2. M. Hoshiya & H.C. Shah, "Dynamics and Eigenvalue Analysis of a Rectangular plate with Stochastic properties", Proc. of JSCE, No. 187 March, 1971