I-207 局部修正を持つ振動系の固有値解析
(局部的内部修正の場合)

佐世保重工 正員 ○高村 清
熊本大学 正員 平井一男
〃 〃 吉村虎蔵

まえがき

発表者のうち平井・吉村はさきに構造物の一部が修正された時，修正以前の原構造物（system A とよぶ）のn次の固有値λ_nとそれに対応する固有ベクトルΦ_n，($n=1,2,3,\cdots$) とが求められておれば，その構造物の dynamic stiffness matrix の一部が変化しても，修正された構造物（今後 system B とよぶ）の固有値と固有ベクトルは，その変化した部分よりなる小さな dynamic stiffness matrix の次数を持つ基礎式を解いてきわめて容易にできることを示した。[1] この種の構造修正は，塑性領域に入った場合，または最適設計においてしばしば取り扱われるものであり，その適用範囲はきわめて広いものと考えられる。ただし，この解析は厳密解であるために，system A のすべての固有値と固有ベクトルとを求めなければ正確な値は得られない。一般に数百元の大次元 matrix に対しては通常いくつかの低次の固有値と固有ベクトルだけしか求められないことが多いので，これらの場合に対して上述の解析法を適用しても満足できる結果は期待できない。この弱点をのりきる方法が以下に述べる解析である。もちろん system A 全部の固有値と固有ベクトルとを使用しないので一つの近似計算法ではあるが，その精度は以下に示す静的な解析をくり返すことによりいくらでもあげられる。

理論 (1) System A に対して完全な固有値解析が行われている場合

system A が N コの集中荷重を持ち，その節点に $\mathbb{F}\times\sin\omega t$ の周期力が作用している時，その変形 $\mathbb{W}_A$ と $\mathbb{F}$ との関係は式(1)で与えられる。

$$(\mathbb{K}-\lambda\mathbb{M})\,\mathbb{W}_A=\mathbb{F}\quad,\qquad \lambda=\omega^2 \tag{1}$$

$\mathbb{K}$: stiffness matrix , $\mathbb{M}$: mass matrix

この式の右辺$=\mathbb{O}$とおいた自由振動の式を何らかの方法で解き，そのn次の固有値λ_nと固有ベクトルΦ_n，($n=1,2,3,\cdots,N$) が求められていたとする。この時式(1)の逆 matrix は modal analysis により求められる。すなわち，

$$\mathbb{W}_A=\mathbb{f}_d\,\mathbb{F}=(\mathbb{K}-\lambda\mathbb{M})^{-1}\mathbb{F} \tag{2}$$

ここに $\mathbb{f}_d$ 中の ij 要素 $f_{d_{ij}}$ は

$$f_{d_{ij}}=\sum_{n=1}^{N}(\lambda_n-\lambda)^{-1}\,\Phi_{ni}\,\Phi_{nj} \tag{3}$$

system A で $\mathbb{K}$ と $\mathbb{M}$ とに $\Delta\mathbb{K}$ と $\Delta\mathbb{M}$ との変化があると，system B に対して式(1)は式(4)となる。

$$(\mathbb{K}-\lambda\mathbb{M}+\Delta\mathbb{K}-\lambda\Delta\mathbb{M})\,\mathbb{W}_B=\mathbb{F} \tag{4}$$

自由振動時には右辺$=\mathbb{O}$とおいて

$$(\mathbb{K}-\lambda\mathbb{M}+\Delta\mathbb{K}-\lambda\Delta\mathbb{M})\,\mathbb{W}_B=\mathbb{O} \tag{5}$$

この修正がごく一部に限られている場合には，$\Delta\mathbb{K}-\lambda\Delta\mathbb{M}$ 中の大部分の行と列とが零要素のみを

持つことになる。この零要素のみを持つ行と列とを取り除くと全部が零でない要素を持つ行と列とよりなる圧縮したマトリックスが作られる。この圧縮したマトリックスを $\Delta\overline{\mathbb{K}}-\lambda\Delta\overline{\mathbb{M}}$ と書くことにする。system A が

$$\widetilde{\mathbb{F}} = -(\Delta\mathbb{K}-\lambda\Delta\mathbb{M})\widetilde{\mathbb{W}}_A \tag{6}$$

の荷重をうけるとき，式(1)より

$$(\mathbb{K}-\lambda\mathbb{M})\widetilde{\mathbb{W}}_A = \widetilde{\mathbb{F}} = -(\Delta\mathbb{K}-\lambda\Delta\mathbb{M})\widetilde{\mathbb{W}}_A \tag{7}$$

または

$$(\mathbb{K}-\lambda\mathbb{M}+\Delta\mathbb{K}-\lambda\Delta\mathbb{M})\widetilde{\mathbb{W}}_A = 0 \tag{8}$$

式(8)と(5)との比較より，system B の自由振動は式(6)の $\widetilde{\mathbb{F}}$ をうける system A の強制振動と等価なことがわかる。$\widetilde{\mathbb{W}}_A$ は式(2)より

$$\widetilde{\mathbb{W}}_A = \mathbb{f}_d\widetilde{\mathbb{F}} \tag{9}$$

これを式(8)に使用して

$$\widetilde{\mathbb{F}} + (\Delta\mathbb{K}-\lambda\Delta\mathbb{M})\mathbb{f}_d\widetilde{\mathbb{F}} = 0 \tag{10}$$

または

$$\{\mathbb{I} + (\Delta\mathbb{K}-\lambda\Delta\mathbb{M})\mathbb{f}_d\}\widetilde{\mathbb{F}} = 0 \tag{11}$$

これは前記の $\Delta\overline{\mathbb{K}}-\lambda\Delta\overline{\mathbb{M}}$ を使用すると

$$\{\mathbb{I} + (\Delta\overline{\mathbb{K}}-\lambda\Delta\overline{\mathbb{M}})\overline{\mathbb{f}}_d\}\overline{\mathbb{F}} = 0 \tag{12}$$

ここに $\overline{\mathbb{F}}$ は $\widetilde{\mathbb{F}}$ より零要素を取り除いたものであり，$\overline{\mathbb{f}}_d$ は $\Delta\mathbb{K}-\lambda\Delta\mathbb{M}$ 中のすべてが零よりなる行と列とに対応するものを $\mathbb{f}_d$ 中より取り除いたものである。λを未知数とすると振動数方程式は

$$\det\{\mathbb{I} + (\Delta\overline{\mathbb{K}}-\lambda\Delta\overline{\mathbb{M}})\overline{\mathbb{f}}_d\} = 0 \tag{13}$$

この式を満足するλは試算法で求められる。いま，求められたものを λ_m とすると，これが求める m 次の固有値となる。この λ_m を式(12)に代入して $\overline{\mathbb{F}}_m$ が求められ，これより $\widetilde{\mathbb{F}}_m$ が容易に得られる。この λ_m と $\widetilde{\mathbb{F}}_m$ とを式(9)に使用すると λ_m に対応する system B の固有ベクトル $\mathbb{S}_m$ が決定される。

$$\mathbb{S}_m = \mathbb{f}_{dm}\widetilde{\mathbb{F}}_m \tag{14}$$

この $\mathbb{f}_{dm}$ 中の ij 要素は次式より計算できる。

$$f_{dmij} = \sum_{n=1}^{N}(\lambda_n-\lambda_m)^{-1}\Phi_{ni}\Phi_{nj} \tag{15}$$

(2) system A の有限個の固有値と固有モードを使用する場合

上の解析は厳密なものであるが，式(3),(14)よりわかるように f_{dij} の計算にはすべての固有値と固有モードが計算されていなければならない。ここで有限コ（実際の計算では 5～10 コ程度）の低次の固有値と固有モードを使用して精度のよい f_{dij} を求めることを考えてみよう。式(3)中の $(\lambda_n-\lambda)^{-1}$ は次のように展開できる。

$$\frac{1}{\lambda_n-\lambda} = \left(\frac{1}{\lambda_n}+\frac{\lambda}{\lambda_n^2}+\frac{\lambda^2}{\lambda_n^3}+\cdots\frac{\lambda^{k-1}}{\lambda_n^k}\right) + \frac{\lambda^k}{\lambda_n^k(\lambda_n-\lambda)} \tag{16}$$

これを式(3)に用いると f_{dij} は次式のように表現できる。

$$f_{dij} = (f_{1sij}+f_{2sij}+\cdots f_{Ksij}) + \Delta f_{dij} \tag{17}$$

ここに

$$f_{ksij} = \lambda^{k-1}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{\lambda_n^k}\Phi_{ni}\Phi_{nj}, \quad \Delta f_{dij} = \lambda^K\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{\lambda_n^K(\lambda_n-\lambda)}\Phi_{ni}\Phi_{nj}, \quad k=1,2,3,\cdots,K. \tag{18}$$

一般の構造物に対して $\lambda_1<\lambda_2<\cdots<\lambda_N$ が成立するので，$(\lambda/\lambda_n)^K \ll (\lambda/\lambda_1)^K$ が成立するようにKをきめ式(18)より f_{ksij} を求めることができれば，f_{dij} はより精度のよい値となる。式(18)を使用すれば λ_n，Φ_n が必要となるが，これは静的な計算により λ_n，Φ_n を使用することなく求められる。すなわち，ある一つの集中荷重 F_J により生じる静的変形は静力学的に求められる。これは式(3)において $\lambda=0$ とした場合に相当する。

$$W_{AS1} = f_{sJ} F_J = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{\lambda_n} \Phi_n \Phi_{nJ} F_J \tag{19}$$

次に $F_1 = \lambda M W_{AS1}$ なる静的荷重による変形はやはり静力学より求められ，これは

$$W_{AS2} = \lambda \sum_{n=1}^{N} \lambda_n^{-2} \Phi_n \Phi_{nJ} F_J \tag{20}$$

同様にして $F_2 = \lambda M W_{AS2}$ に対しては

$$W_{AS3} = \lambda^2 \sum_{n=1}^{N} \lambda_n^{-3} \Phi_n \Phi_{nJ} F_J \tag{21}$$

この操作を k 回くり返すと W_{ASk} が静的に決定でき，これより f_{ksij} が λ_n と Φ_n とを使用することなく求められることがわかる。この静的計算は式(12)の F に対して行わなければならないので，N元の連立方程式を $\Delta K-\lambda\Delta M$ の次数をK倍した回数だけ解かなければならない。しかし，K は一般に band matrix であるので適当な方法を用いれば簡単に計算できよう。さらに，以下の計算を行えばこの連立方程式を解く回数を半減できる。

いま，Jの値として i と j をとり，k として K と $\bar{K}$ を考える。ここに $1 \leq \bar{K} \leq K$．この時静的変形 W_{ASK} と $W_{AS\bar{K}}$ は

$$W_{ASK} = \lambda^{(K-1)} \sum_{n=1}^{N} \lambda_n^{-K} \Phi_n \Phi_{ni} F_i \tag{22}$$

$$W_{AS\bar{K}} = \lambda^{(\bar{K}-1)} \sum_{n=1}^{N} \lambda_n^{-\bar{K}} \Phi_n \Phi_{nj} F_j \qquad \text{ただし}\ F_i = F_j = 1 \tag{23}$$

いま $W_{ASK}^T \cdot M \cdot W_{AS\bar{K}}$ なる scalar を考え，これを $W^*_{(K+\bar{K})ij}$ とあらわすと

$$W^*_{(K+\bar{K})ij} = W_{ASK}^T M W_{AS\bar{K}} = \lambda^{(K+\bar{K}-2)} \sum_{n=1}^{N} \lambda_n^{-(K+\bar{K})} \Phi_{ni} \Phi_{nj} F_i F_j \tag{24}$$

式(18)と比較して $f_{(K+\bar{K})sij}$ は $W^*_{(K+\bar{K})ij}$ を λ 倍して得られることがわかる。この $W_{ASK}^T \cdot M \cdot W_{AS\bar{K}}$ の計算はたんなる vector のかけ算であるから計算量としてはわずかである。

(3) 未知数のとり方について

ここでは式(12)中の λ を未知数として解析しているが，逆に λ を与えて ΔK，ΔM 中の一つの変数を未知数として取り扱うことも可能である。この場合には与系がある一つの定められた固有値を持つように ΔK または ΔM 中の一つの未知数を決定することになる。いくつかの固有値を満足するように ΔK，ΔM をきめるためには式(13)を連立に解けばよい。与えられた固有値を $\lambda_{m1}, \lambda_{m2}, \cdots \lambda_{mR}$ とすると，

$$\det\left\{ I + (\Delta K - \lambda_{mr}\Delta M) f_{dr} \right\} = 0 \qquad , \quad r=1,2,\cdots,R. \tag{25}$$

最適設計においてはこれを制限関数として付け加え，目的関数を min または max にすることになる。この場合式(25)より非線形の最適問題となる。

参考文献

1) 平井，吉村：最適設計における固有値解析の一手法，構造強度に関する講演会前刷，S.47. 7. 12~13.