

京都大学工学部 正員 山田善一  
 京都大学工学部 正員 渡辺英一  
 京都大学工学部 正員 河野健二

### 1. まえがき

減衰項の取り扱いがこれまで構造物の振動解析を試みる時問題にされてきた。減衰の種類としては内部減衰、構造減衰、逸散減衰があるが、まだ正しい評価が与えられるには至っていない。減衰そのものの厳密な評価はできないとしても、耐震の面から見ると減衰の簡明な表わし方、およびその振動特性を明らかにすることは必要だと思われる。そこで連続体の解析において発達した有限要素法を用いて減衰の扱いを考へてみることにする。有限要素法では構造全体を任意の小さな要素に分割し、その各々の要素に対して質量マトリックスや剛性マトリックスを導き各節点の平衡を考へて全体の運動方程式を作っている。したがって各要素のもつ特性は質量マトリックスや剛性マトリックスを通して運動方程式の中に表現されることになる。一般に減衰マトリックスは質量あるいは剛性マトリックスに比例した形で扱っている。この比例形の減衰マトリックスは対称であるため扱いやすい。しかし構造全体を見るとき減衰は必ずしも一律でなくなり、このような減衰の異なる部分よりなる構造では非比例形の減衰マトリックスが考へられる。このマトリックスの扱いは複素固有値問題<sup>1)</sup>となる。そこで有限要素法により全体の減衰マトリックスを作り、非比例減衰の上場から比例減衰も含めて考へることにより、減衰の違いがどのように扱えるのか考へてみることにする。

### 2. 減衰マトリックス

減衰の評価が明確にされにくい現在、一般に硬型あるいは実物の振動実験より基本的な減衰を求めている。そこで解析を行うとき減衰マトリックスはどのように表わされるのか考へてみる。減衰力が分布する質量の速度に比例したものと考へると減衰マトリックスは質量マトリックスに比例したものとなる。また減衰力が歪速度に比例したものと考へるとそれは剛性マトリックスに比例したものとなる。剛性マトリックスに比例した減衰マトリックスでは高次モードの減衰定数は大きくなり、質量マトリックスに比例した場合は逆に高次ほど減衰定数は小さくなる。また各次モードの減衰定数が一樣になるような減衰マトリックスも考へられる。これは T. K. Caughy<sup>2)</sup> によって示された減衰マトリックスを対称化するための十分条件を表わしている。そこで有限要素法<sup>3)</sup>では各要素ごとに要素の質量あるいは剛性マトリックスを考へるので、各要素における減衰の性質が一樣であると考へると、質量あるいは剛性マトリックスに比例した形の減衰マトリックスを各要素ごとに考へることができる。この減衰マトリックスを合成すると構造全体の減衰マトリックスが得られる。各要素の減衰が一樣であれば減衰マトリックスは比例形となるが、そうでない場合非比例形の減衰マトリックスになる。ここではこれら3つの減衰マトリックスを考へることにする。一方 R. W. Clough<sup>4)</sup> は次のような減衰マトリックスを表わしている。つまり実験的に各次モードの減衰定数  $\delta_i$  を決定し、非減衰時の固有モード  $\{\phi_i\}$  と質量マトリックス  $[M]$  を用いて減衰マトリックスは次のように表わされる。

$$[C] = [M] \left( \sum_i \delta_i \{\phi_i\} \{\phi_i^T\} \right) [M] \quad (1)$$

この  $[C]$  は比例形の減衰マトリックスとして扱える。しかし実験的に高次モードの減衰定数を決定す

ることのむずかしさと、部分的に異なる減衰をもつ構造全体の減衰マトリックスを扱うとき問題となる各次モードの位相差の影響が明らかにされないと考えられるのでここではこの減衰マトリックスは考えない。

### 3. 解析方法

板厚が薄くたわみが小さいとき、板の変形は中央面の変位  $w$  で表わされる。たわみ面の連続を完全には満足していないが、各要素の節点においてはその連続性を満足している非適応な関数を考える。Fig 1 に示すような長方形要素の変位関数は次の式で表わされる。

$$w = d_1 + d_2 x + d_3 y + d_4 x^2 + d_5 xy + d_6 y^2 + d_7 x^3 + d_8 x^2 y + d_9 xy^2 + d_{10} y^3 + d_{11} x^2 y + d_{12} xy^2 \quad (2)$$

節点  $i, j, k, l$  を考えて節点の変位ベクトルを次のように表わす。

$$\{\delta\}^e = [\{\delta_i\} \{\delta_j\} \{\delta_k\} \{\delta_l\}]^T \quad (3)$$

$$\text{ここに } \{\delta_i\} = [w_i, -(\frac{\partial w}{\partial x})_i, (\frac{\partial w}{\partial y})_i]^T$$

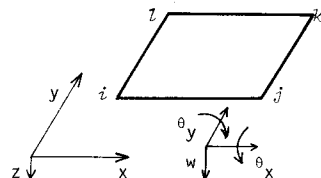


Fig 1

節点の座標、変位の関係を用いて要素内の変位  $w$  を表わす。たかと歪の関係、歪と変位ベクトルの関係を用いると要素の剛性マトリックス  $[K]^e$  が求まる。また要素に作用する外力として慣性力を考えると各節点における等価節点荷重  $E$  を計算することにより要素の質量マトリックス  $[M]^e$  を得ることができる。そこで全体にわたって各節点の平衡  $E$  を考えることにより構造全体の質量マトリックス  $[M]$ 、および剛性マトリックス  $[K]$  が得られる。いま要素の減衰マトリックスを要素の質量マトリックスおよび剛性マトリックスに比例した形を考える。基本振動数  $\omega$ 、要素において考える減衰  $\rho_e$  を表わす。この減衰マトリックスを合成することにより全体の減衰マトリックスが得られる。

$$[M_c] = \sum_e \rho_e \omega [M]^e \quad (4)$$

$$[K_c] = \sum_e \frac{\rho_e}{\omega} [K]^e \quad (5)$$

これらの減衰マトリックスは減衰が一樣のとき質量あるいは剛性マトリックスに比例した形となる。また次のような減衰マトリックスも考えられる。

$$[E_c] = [M_c]^{-\frac{1}{2}} ([M_c]^{-\frac{1}{2}} [K_c] [M_c]^{-\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} [M_c]^{\frac{1}{2}} \quad (6)$$

この減衰マトリックスでは減衰が一樣のとき各次モードの減衰定数が一定になる。そこで減衰マトリックスを  $[C]$  で表わすと運動方程式は次のように表わされる。

$$[M] \{\ddot{\delta}\} + [C] \{\dot{\delta}\} + [K] \{\delta\} = \{F\} \quad (7)$$

いま  $[C]$  が比例形の減衰マトリックスの場合は対称になるので自由振動から得られるモーダルマトリックスを用いて対角化できる。しかし一般的に  $[C]$  が非比例形の場合、非対称になるのでモーダルマトリックスを用いても対角化することができない。そこで  $[C]$  が非比例形であるとき、(7) 式と次式 (8) を一緒にして自由度を倍にして扱う。

$$[M] \{\dot{\delta}\} - [M] \{\delta\} = \{0\} \quad (8)$$

境界条件を導入することによって次式を得る。

$$[G] \{\dot{y}\} + [H] \{y\} = \{Y\} \quad (9)$$

ここに

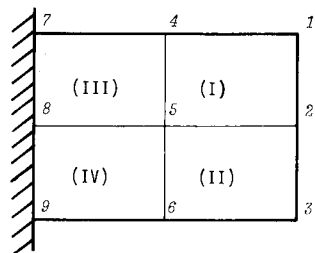


Fig 2

$$[G] = \begin{bmatrix} [0] & [M_u] \\ [M_u] & [C_u] \end{bmatrix}, \quad [H] = \begin{bmatrix} -[M_u] & [0] \\ [0] & [K_u] \end{bmatrix}$$

$$\{y\} = \begin{Bmatrix} \{\delta\} \\ \{\delta\} \end{Bmatrix}, \quad \{Y\} = \begin{Bmatrix} \{o\} \\ \{F\} \end{Bmatrix}$$

したがって(9)式は次のような固有値問題となる。

$$\{y\} + [Z]\{y\} = \{o\} \quad (10)$$

$$[Z] = \begin{bmatrix} [M_u]^{-1}[C_u] & [M_u]^{-1}[K_u] \\ -[I] & [0] \end{bmatrix}$$

いま  $\{y\} = [Z]e^{pt}$  ( $p$ : 複素数) とおくと

$$p[Z] + [Z] = 0 \quad (11)$$

を解くことによって固有値  $p$  を求めることができる。一般に  $[Z]$  は非対称であるので固有値は複素数になる。非対称マトリックスの各要素が実数であるときその固有値を求める方法にはいろいろの方法があるが、ここでは Double QR Method を用いることにする。この方法は複素固有値が必ずペアになることを利用して実数計算だけで済ませる方法であり、収束が早く、反復1回当りの計算時間も少ない。各次モードに対する複素固有値、固有ベクトルは次のように共役な形で表わされる。

$$p_j = -\xi_j \omega_j + i\omega_j, \quad \bar{p}_j = -\xi_j \omega_j - i\omega_j \quad (12)$$

$$[Z]_j = \{\xi_j + i\eta_j\}, \quad \{\bar{Z}\}_j = \{\xi_j - i\eta_j\}$$

ここに  $\xi_j, \omega_j$  はそれぞれ  $j$  次の減衰定数および振動数を表わす。

$r$  次モードによる  $j$  点の変位は

次のようになる。

$$y_{jr} = R e^{-\xi_j t} X_{jr} \cos(\omega_j t + \theta_{jr}) \quad (13)$$

ここに

$$X_{jr} = \sqrt{\xi_{jr}^2 + \omega_{jr}^2}$$

$$\theta_{jr} = \tan^{-1}(\xi_{jr}/\omega_{jr})$$

Table 1

Natural Frequencies and Damping Constants

(A)	(I),(II)	0.005	(III),(IV)	0.015		
Mode	$\omega_j$	$[C]=[M_c]$	$\omega_j$	$[C]=[E_c]$	$\omega_j$	$[C]=[K_c]$
1	24.76	0.005509	24.76	0.008718	24.76	0.01434
2	61.24	0.002392	61.24	0.007939	61.24	0.02738
3	155.9	0.001452	155.9	0.009206	155.9	0.06458
4	188.5	0.000832	188.5	0.007310	188.5	0.06555

(B)	(I),(III)	0.005	(II),(IV)	0.015		
Mode	$\omega_j$	$[C]=[M_c]$	$\omega_j$	$[C]=[E_c]$	$\omega_j$	$[C]=[K_c]$
1	24.76	0.010000	24.76	0.010000	24.76	0.01000
2	61.24	0.004043	61.24	0.009514	61.24	0.02474
3	155.9	0.001588	155.9	0.009982	155.8	0.06302
4	188.5	0.001313	188.5	0.009562	188.5	0.07616

(C)	(I),(II),(III),(IV)	0.01				
Mode	$\omega_j$	$[C]=[M_c]$	$\omega_j$	$[C]=[E_c]$	$\omega_j$	$[C]=[K_c]$
1	24.76	0.010000	24.76	0.009999	24.76	0.01000
2	61.24	0.004043	61.24	0.010000	61.24	0.02474
3	155.9	0.001588	155.9	0.010000	155.6	0.06309
4	188.5	0.001313	188.5	0.010000	188.0	0.07636

Table 2

Natural Frequencies and Damping Constants

(A)	(I),(II)	0.005	(III),(IV)	0.025		
Mode	$\omega_j$	$[C]=[M_c]$	$\omega_j$	$[C]=[E_c]$	$\omega_j$	$[C]=[K_c]$
1	24.76	0.006025	24.75	0.01151	24.76	0.02369
2	61.24	0.002763	61.24	0.01050	61.22	0.04240
3	155.9	0.002109	155.9	0.01296	156.4	0.09731
4	188.5	0.001009	188.5	0.00948	188.5	0.09293

(B)	(I),(III)	0.005	(II),(IV)	0.025		
Mode	$\omega_j$	$[C]=[M_c]$	$\omega_j$	$[C]=[E_c]$	$\omega_j$	$[C]=[K_c]$
1	24.76	0.015000	24.75	0.01498	24.76	0.01500
2	61.24	0.006065	61.23	0.01364	61.22	0.03711
3	155.9	0.002382	155.9	0.01495	155.9	0.09442
4	188.5	0.001970	188.5	0.01369	189.3	0.1137

Table 3

Natural Frequencies and Damping Constants

(A)	(I),(II)	0.005	(III),(IV)	0.05		
Mode	$\omega_j$	$[C]=[M_c]$	$\omega_j$	$[C]=[E_c]$	$\omega_j$	$[C]=[K_c]$
1	24.76	0.007304	24.75	0.01750	24.74	0.04710
2	61.24	0.003687	61.23	0.01651	61.22	0.07999
3	155.9	0.003753	155.9	0.02161	159.9	0.17400
4	188.5	0.001446	188.5	0.01472	189.9	0.1606

(B)	(I),(III)	0.005	(II),(IV)	0.05		
Mode	$\omega_j$	$[C]=[M_c]$	$\omega_j$	$[C]=[E_c]$	$\omega_j$	$[C]=[K_c]$
1	24.76	0.027520	24.75	0.02744	24.75	0.02751
2	61.24	0.011120	61.22	0.02351	61.22	0.06804
3	155.9	0.004367	156.0	0.02735	157.4	0.17300
4	188.5	0.003612	183.5	0.02326	195.5	0.1985

この式から  $r$  次モードにおいて点  $i$  と位相角  $\theta_{ri}$ , 点  $j$  と位相角  $\theta_{rj}$  が存在し, 点  $j$  と点  $i$  の間には位相差  $|\theta_{ri} - \theta_{rj}|$  が存在する。比例形の減衰マトリックスを用いると  $r$  次モードにおける位相差が  $0^\circ$  から  $180^\circ$  になり振動モードにおいて定常な節点が存在する。したがってモード間の連成はなく各々の振動モードがそれぞれ独立に加えられて振動形が得られる。しかし非比例形の減衰マトリックスを用いると位相差が存在し, これによって比例形の減衰マトリックスを用いたとき見られるような定常な節点が現われなくなる。したがってモード間の連成も考えられる。

#### 4. 数値計算

Fig. 2 に示される板の振動を考える。減衰の分布が一樣でない場合の計算の一例を Table 1 ~ Table 4 に示す。(A)において  $[M_c]$  を用いると速度の大きい要素の減衰が小さいとき, 1次の減衰定数は小さい。2次以上の減衰定数は減衰の差の増加とともに比例減衰より大きくなる。また位相差は減衰の差が大きくなっても小さい。振動数は自由振動のそれに一致している。  $[K_c]$  を用いると応力の大きいと考えられる要素に大きな減衰を有するとき, 1次の減衰定数は大きく評価される。減衰の差が増加するにつれ, 2次以上の減衰定数は比例減衰より小さくなる。位相差は減衰の差の増加とともに大きくなり振動数はその影響をうける。  $[E_c]$  を用いると1次の減衰定数は  $[M_c]$ ,  $[K_c]$  の平均よりやや小さく2次以上の減衰定数は1次に対して約10%の変化を示している。位相差は減衰の差が大きくなっても小さい。(B)において速度と応力の大きい要素の減衰が大きいとき  $[M_c]$ ,  $[K_c]$ ,  $[E_c]$  の1次の減衰定数は等しい。  $[M_c]$ ,  $[K_c]$  では2次以上の減衰定数は比例減衰に一致している。これは減衰の違いが大きくなっても変わらない。位相差は  $[M_c]$  では減衰の差が増加しても小さいが  $[E_c]$ ,  $[K_c]$  では無視できず, 特に  $[K_c]$  では大きい。

5. あとがき

減衰が異なるとき, これら3つの非比例形の減衰マトリックスを用いると, (1)  $[M_c]$ ,  $[K_c]$  はそれぞれ速度, 応力の大きい要素の減衰の大きさに類似する1次の減衰定数を与え, 2次以上の減衰定数は減衰の分布を考慮することによって比例減衰から類推できる。(2)  $[M_c]$ ,  $[E_c]$  を用いると位相差は一般に小さいが  $[K_c]$  では無視できない値を示している。

1) W.C.Hurty and M.F.Rubinstein, Dynamics of Structures, Prentice-Hall, Inc. 1964  
 2) R.W.Clough, Analysis of Structural Vibrations and Dynamics Response, Recent Advances in Matrix Methods of Structural Analysis and Design, pp441-486, U.of Alabama P. , 1971  
 3) 山田善一, 動的問題(有限要素法による数値解析), 第21回応用力学連合講演会, 7P 221~228, 1977

Table 4

#### Phase Angle Differences

(A)		Point 1 & Point 4			
Damping Matrix	Mode	Damping Constants			
		0.005-0.015	0.005-0.025	0.005-0.05	
$[C]=[M_c]$	1	0.0	0.0	0.0	
	2	0.0	0.0	0.1	
	3	0.1	0.3	0.6	
	4	0.1	0.2	0.3	
$[C]=[E_c]$	1	0.0	0.1	0.2	
	2	0.1	0.3	0.5	
	3	0.5	1.0	2.1	
	4	0.5	1.1	2.3	
$[C]=[K_c]$	1	0.1	0.2	0.5	
	2	0.7	1.4	3.3	
	3	2.3	4.7	12.0	
	4	5.4	10.7	24.1	

(B)		Point 1 & Point 3			
Damping Matrix	Mode	Damping Constants			
		0.005-0.015	0.005-0.025	0.005-0.05	
$[C]=[M_c]$	1	0.3	0.6	1.3	
	2	0.3	0.6	1.3	
	3	0.5	0.9	2.2	
	4	0.0	0.0	0.1	
$[C]=[E_c]$	1	0.3	0.6	1.3	
	2	0.3	0.4	1.0	
	3	2.8	5.6	12.7	
	4	0.2	0.3	0.6	
$[C]=[K_c]$	1	0.2	0.5	1.1	
	2	0.0	0.1	0.1	
	3	16.2	31.9	67.7	
	4	2.2	4.7	12.3	