

1. まえがき

不規則外力の確率統計的評価, 構造物の振動解析の研究が進むにつれて, 当然これらに対する応答量の確率統計的評価が可能であり, 応答の確率変数が知られると, 次の段階ではこれらを生かして, 合理的な設計法へと応用していく問題が生じてくる。著者らは多自由度系構造物の応答を過渡応答として取り扱い, その確率応答諸量, すなわち分散, 共分散, 相関関数を理論的に求めて, その統計的性質を調べた。⁽¹⁾ 今回は, これらの基礎的応答諸量から破壊のメカニズムと関係の深い種々の問題, すなわち *threshold-value problem*, *zero crossing problem*, *peak distribution problem* および最大応答の確率分布を取りあげ, 多自由度系構造物にこれらの概念を応用して, 系の質量分布, 系の剛性分布および各モード間の減衰定数の影響の変化が構造物の安全性評価におよぼす影響を考察しようとするものである。

2. 定常確率過程に対する線型多自由度系の過渡応答の基礎的確率量

線型多自由度系の運動方程式は, 減衰項を適当に仮定すると各振動モードに対応する1自由度系の運動方程式に分解される。構造物の点*i*の変位応答 y_i をモード X_{ji} と時間関数 $\xi_j(t)$ の積で表わすと, 点*i*の振動変位 y_i は, $y_i = \sum_{j=1}^n X_{ji} \xi_j(t)$ で示される。ここで添字 j はモード次数をあらわす。過渡応答の基礎的確率量である変位応答の共分散 $K_{y_i y_i}(t_1, t_2)$ は, 次式のようにあらわされる。

$$\begin{aligned} K_{y_i y_i}(t_1, t_2) &= E[y_i(t_1), y_i(t_2)] \\ &= \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^n \left[\frac{X_{il} X_{im} \beta_l \beta_m}{\bar{\omega}_l \bar{\omega}_m} \int_0^{\infty} S_g(\omega) \cos \omega(t_1 - t_2) \left\{ I_l(\bar{\omega}_l, t) \cdot I_m(\bar{\omega}_m, t) + J_l(\bar{\omega}_l, t) \cdot J_m(\bar{\omega}_m, t) \right\} d\omega \right] \\ &\quad + \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^n \left[\frac{X_{il} X_{im} \beta_l \beta_m}{\bar{\omega}_l \bar{\omega}_m} \int_0^{\infty} S_g(\omega) \sin \omega(t_1 - t_2) \left\{ J_l(\bar{\omega}_l, t) \cdot I_m(\bar{\omega}_m, t) - I_l(\bar{\omega}_l, t) \cdot J_m(\bar{\omega}_m, t) \right\} d\omega \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ここで, } I_l(\bar{\omega}_l, t) &= \int_0^{t_1 - t_0} e^{-h_{nl} \omega_l t} \sin \bar{\omega}_l t \cos \omega_l t dt, & I_m(\bar{\omega}_m, t) &= \int_0^{t_1 - t_0} e^{-h_{ml} \omega_m t} \sin \bar{\omega}_m t \cos \omega_m t dt \\ J_l(\bar{\omega}_l, t) &= \int_0^{t_1 - t_0} e^{-h_{nl} \omega_l t} \sin \bar{\omega}_l t \sin \omega_l t dt, & J_m(\bar{\omega}_m, t) &= \int_0^{t_1 - t_0} e^{-h_{ml} \omega_m t} \sin \bar{\omega}_m t \sin \omega_m t dt \end{aligned}$$

ω_l : l 次の固有円振動数, h_{nl} : l 次の減衰定数, β_l : l 次の振動に対する外力の影響関数
 $\bar{\omega}_l = \sqrt{1 - h_{nl}^2} \omega_l$, $S_g(\omega)$: パワースペクトル密度

上式のように共分散を基本として, 確率応答評価に必要な基本的確率量, すなわち変位 $y_i(t)$, 速度 $\dot{y}_i(t)$ および加速度 $\ddot{y}_i(t)$ のそれぞれの分散および相関関数は次のようにあらわされる。

$$\sigma_{y_i}^2(t) = E[y_i^2(t)] = K_{y_i y_i}(t, t), \quad \sigma_{\dot{y}_i}^2(t) = E[\dot{y}_i^2(t)] = K_{\dot{y}_i \dot{y}_i}(t, t), \quad \sigma_{\ddot{y}_i}^2(t) = E[\ddot{y}_i^2(t)] = K_{\ddot{y}_i \ddot{y}_i}(t, t)$$

$$\rho_{y_i y_i}(t) = \frac{E[y_i(t) y_i(t)]}{\{\sigma_{y_i}(t) \sigma_{y_i}(t)\}}, \quad \rho_{y_i y_i}(t_1, t_2) = \frac{E[y_i(t_1) y_i(t_2)]}{\{\sigma_{y_i}(t_1) \sigma_{y_i}(t_2)\}}$$

3. 不規則外力による構造物の応答評価

(1) threshold-value problem

与えられた時間区間内で確率過程 $X(t)$ がある threshold-value を横切る回数についての確率的性質を調べることである。いま時刻 t における ξ threshold-value の単位時間当りの横切る回数を $N(\xi, t)$ とするとその相関関数を $\Phi_{NN}(\xi, t_1, t_2)$ とすると次式のようなになる。

$$\Phi_{NN}(\xi, t_1, t_2) = E[N(\xi, t_1) N(\xi, t_2)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |X(t_1)| |X(t_2)| P_{|X(t_1)|}(\xi, X_1, t_1; \xi, X_2, t_2) dX_1 dX_2$$

$X(t)$ を Gauss 過程入力に対する構造物の応答変位であるとする、その密度関数は次式となる。

$$P_{|X(t)|}(x, \dot{x}, t) = \frac{1}{2\pi \sigma_x \sigma_{\dot{x}} \sqrt{1 - \rho_{x\dot{x}}^2}} \exp\left\{-\frac{\sigma_{\dot{x}}^2 x^2 - 2\sigma_x \sigma_{\dot{x}} \rho_{x\dot{x}} x \dot{x} + \sigma_x^2 \dot{x}^2}{2 \sigma_x^2 \sigma_{\dot{x}}^2 (1 - \rho_{x\dot{x}}^2)}\right\}$$

結局、 $E[N_+(\xi, t)]$ は次式で求めることが出来る。

$$E[N_+(\xi, t)] = \frac{1}{2\pi} \frac{\sigma_{\dot{x}}}{\sigma_x} \exp\left\{-\frac{1}{2} \left(\frac{\xi}{\sigma_x}\right)^2\right\} \left\{ \sqrt{1 - \rho_{x\dot{x}}^2} \exp\left\{-\frac{\rho_{x\dot{x}}^2}{2(1 - \rho_{x\dot{x}}^2)} \left(\frac{\xi}{\sigma_x}\right)^2\right\} + \sqrt{\frac{\pi}{2}} \rho_{x\dot{x}} \left(\frac{\xi}{\sigma_x}\right) \right\} \left\{ 1 + \operatorname{erf}\left(\frac{\rho_{x\dot{x}}}{\sqrt{2(1 - \rho_{x\dot{x}}^2)}}\right) \right\}$$

(2) peak distribution problem

threshold value problem で threshold value ξ よりも上で極値をとる回数を調べる。単位時間当りの peak (極大値) の個数の期待値は次式で示される。

$$E[M(\xi, t)] = - \int_{\xi}^{\infty} \int_{-\infty}^0 \ddot{x}(t) \cdot P_{|X(t)|}(\xi, 0; \ddot{x}, t) dx d\ddot{x}$$

threshold value $\xi \rightarrow -\infty$ までひきのばすと単位時間あたりの全 peak 数になり、それを $M_T(t)$ とあらわすと次式のようなになる。

$$E[M_T(\xi, t)] = - \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^0 \ddot{x}(t) P_{|X(t)|}(\xi, 0; \ddot{x}, t) d\ddot{x}$$

単位時間当りの $X(t) \leq \xi$ なる peak の個数の割合は、時刻 t における peak の分布関数は次式で表わされる。

$$F_{\xi}(\xi, t) = \frac{E[M_T(\xi, t)] - E[M(\xi, t)]}{E[M_T(\xi, t)]}$$

結局 peak の密度関数は次式で示される。

$$P_{\xi}(\xi, t) = - \frac{1}{E[M_T(t)]} \int_{-\infty}^0 \ddot{x}(t) P_{|X(t)|}(\xi, 0; \ddot{x}, t) d\ddot{x}$$

いま、 $X(t)$ を平均値 zero の定常ガウス過程を考えると、 $E[M_T(t)]$, $P_{\xi}(\xi, t)$ は次式のようなになる。

$$E[M_T(t)] = \frac{1}{2\pi} \frac{\sigma_{\dot{x}}}{\sigma_x}$$

$$P_{\xi}(\xi, t) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2} \sigma_x^2 \sigma_{\dot{x}} \sigma_{\ddot{x}}} \left[|M|^{1/2} \exp\left(-\frac{\sigma_{\dot{x}}^2 \sigma_{\ddot{x}}^2 \xi^2}{2|M|}\right) + \sigma_{\dot{x}}^4 \xi \left(\frac{\pi}{2\sigma_x^2 \sigma_{\dot{x}}^2}\right)^{1/2} \left\{ 1 + \operatorname{erf}\left(\frac{\sigma_x \xi}{\sqrt{2|M|} \sigma_x}\right) \exp\left(-\frac{\xi^2}{2\sigma_x^2}\right) \right\} \right]$$

ここで、 $|M| = \sigma_x^2 \sigma_{\dot{x}}^2 \sigma_{\ddot{x}}^2$

$$M_{11} = \sigma_x^2 \sigma_{\dot{x}}^2, \quad M_{13} = M_{31} = \sigma_{\dot{x}}^2, \quad M_{33} = \sigma_{\dot{x}}^2 \sigma_{\ddot{x}}^2$$

(3) 最大応答の確率分布

後藤・蓮田両氏は、発生過程の微分方程式を解くことにより任意のパワースペクトル密度を有する地震に対する最大応答の確率分布を求めている。それによると最大応答の確率分布 $\psi(Y, t)$ は次式で示されている。

$$\psi(Y, t) = \text{erf}\left(\frac{Y}{\sqrt{2}\sigma_x}\right) \exp\left\{-\frac{\frac{1}{\pi} \frac{\sigma_x}{\sigma_y} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{Y}{\sigma_x}\right)^2\right]}{\text{erf}\left(\frac{Y}{\sqrt{2}\sigma_x}\right)}\right\}$$

4. 数値計算とその結果

数値計算の対象とした多自由度系構造物は、5質点系せん断型構造物である。多層構造物では、各層の質量分布・剛性分布および粘性減衰が適正分布しているかどうかによって応答評価の影響もかなり変化するので数値計算の parameter は、次の3種の質量および剛性分布をもつ構造形式を対象とした。

- (I) Uniform frame
- (II) Taper frame
- (III) Step frame

各構造形式の質量分布および剛性分布を図1に一括表示した。なお図中の各数値は、第5層の質量および剛性を1と考えた場合の各層の値である。

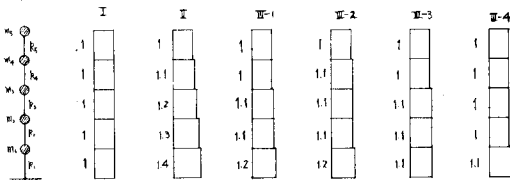


図-1 質量・剛性分布

Uniform frame と Step frame について、それぞれの柔のモードおよび変位・速度・加速度の分散を図-3、図-4にそれぞれ1列に図示した。図-5に $E[N_x(t)]$ 、図-6に $E[M_x(t)]$ 、図-7に $E[N]$ 、図-8に $\psi(Y, t)$ を各層ごとに図示した。結果については講演時に述べる。数値計算は、UNIPAC 494 によった。計算遂行にあたり当社の木村保氏に多大の御援助を得たことを感謝します。

(1) 藤田弘行・石田晋弘：不規則外力による多自由度系構造物の応答解析について，土木学会関西支部第9年次学術講演会報告集，昭46.5

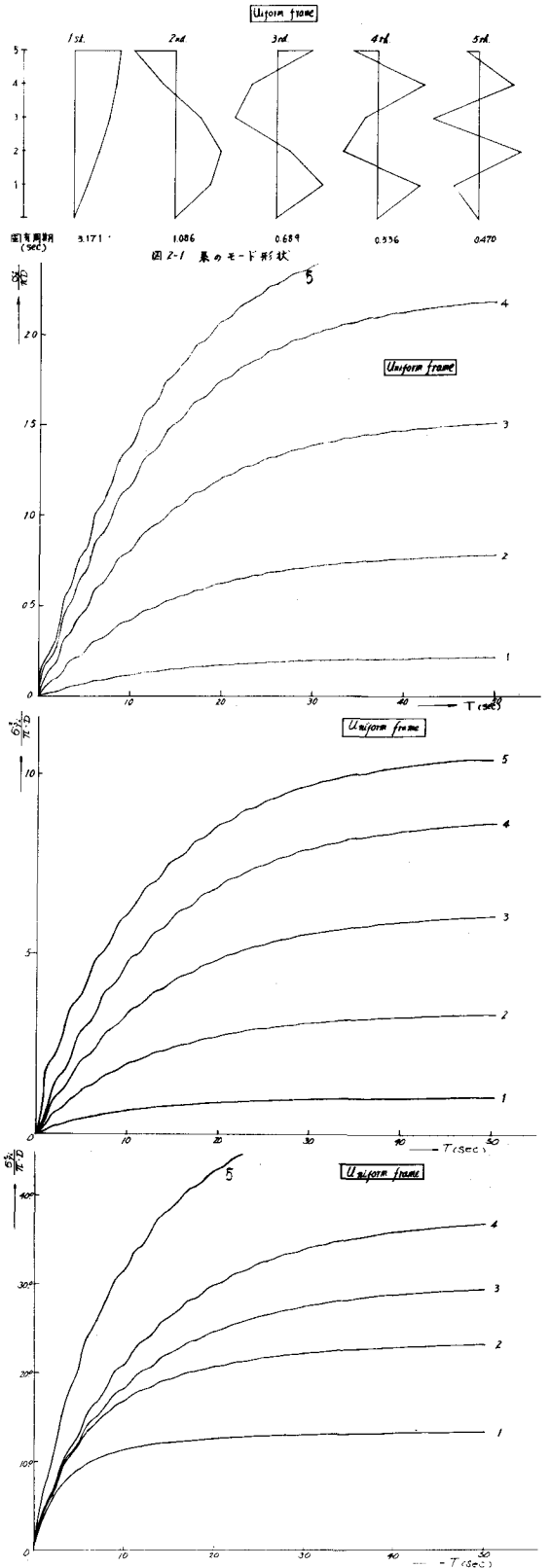


図-2-1 柔のモード形状

