I-204 規則波をうける海中骨組構造物の非線型振動

鹿島建設技術研究所　　庄子幹雄
〃　　正会員 ○今井貫爾
〃　　〃　　成田知明

1. 序論

本報文は海中に骨組構造物を設置した時の規則波による構造物の動的挙動を明らかにすることを目的とする。地震時の解析とちがって、外力としては波力を考えなければならない。波力の表示式として著名なMorison–O' Brien–Shaafの式を使い、微小振動を仮定して運動方程式をたてるが、構造物と水粒子の相対運動を考えるために、運動方程式は非線型になる。しかし差分近似をすることによって解が得られることを示す。

2. 波力

水中に固定された物体に作用する波力は、慣性力と抗力の和として、次の様に与えられている。

$$F_T = F_D + F_I$$

$$= C_D \frac{\rho}{2} (Area) \, |\dot{V}| V + C_M \rho (Vol) \ddot{V} \qquad (1)$$

ここに F_T＝全波力、F_D＝抗力、F_I＝慣性力、ρ＝海水の密度、C_D＝抗力係数、C_M＝質量係数、$\dot{V}$＝水粒子速度、$\ddot{V}$＝水粒子加速度、Area＝波方向の物体の正射影面積、Vol.＝水中物体の体積である。この(1)式の表示は現在の所、問題が残っていて確定されたものではないが、ある程度工学的に満足できるものであるといわれている。特に(1)式の C_D、C_M という二つの係数が問題であって流体場の特性、物体の幾何学的特性等に影響をうけ、最終的には実験によって決定されねばならない。しかし、従来の研究によると、パイルに対して C_D=1.05、C_M=1.40 位の平均値が知られているので、本論もその値を使用する。さて(1)式は水中において固定されている物体に作用する波力であるから、動的問題を考える場合には、その式を若干修正せねばならない。物体がある速度と加速度をもって運動しているのであるから、このときの物体に作用する水粒子速度、加速度は物体の運動を加味した相対的な値としなければならない。つまり、動的外力としての波力は、(1)式より

$$F_T = C_D \frac{\rho}{2} (Area) \, |\dot{V} - \dot{u}| \, (\dot{V} - \dot{u}) + C_M \rho (Vol.) (\dot{V} - \dot{u}) \qquad (2)$$

と修正される。ここで $\dot{u}$、$\ddot{u}$ は構造部材のそれぞれ速度、加速度である。(2)式の表示を構造物の外力として考えるが、その第一項の抗力の項が非線型項であることに注意されたい。

3. 運動方程式

図1に示す様に骨組構造物を集中質量系として取り扱う。このときの運動方程式は良く知られている様に、マトリックス形で

$$[\diagdown M \diagdown]\{\ddot{u}\} + [C]\{\dot{u}\} + [K]\{u\} = \{F(t)\} \qquad (3)$$

とかける。ここに $[\diagdown M \diagdown]$＝対角質量マトリックス。$[C]$＝減衰マトリックス。$[K]$＝剛性マトリックス。$\{u\}$＝節点変位ベクトル。$\{F(t)\}$＝外力ベクトルである。一般に$\{u\}$は1コの節点あたり、3コの平行成分と3コの回転成分をもつので、節点数をNとして、(3)式は6Nコの連成微分方程式になってい

る。しかし、(2)式で与えられる波力は、波方向に対するものであって、回転成分、鉛直成分、波進行方向に対するものは知られていない。したがって$\{u\}$の成分としては、波方向の変位成分だけをとるものとする。つまり波方向の振動成分が卓越すると考えるのである。減衰マトリックスについては良く知られているような質量か剛性に比例するものを考える。剛性マトリックスは骨組の有限要素法を使かって導く。(3)式に(2)式を代入して整理せば

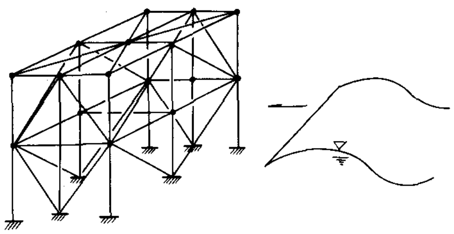

図 1.　集中質量系

$$\lceil M+C_M \rfloor \{\ddot{u}\}+[C]\{\dot{u}\}+[K]\{u\}$$
$$=\lceil C_D \rfloor \{|V-\dot{u}|(V-\dot{u})\}+\lceil C_M \rfloor \{\dot{V}\} \tag{4}$$

となる。ここに$\lceil C_D \rfloor$、$\lceil C_M \rfloor$はそれぞれ抗力、質量係数マトリックスである。さて、水粒子速度、加速度は、多くの波理論から計算できるが、ここでは微小振幅波理論を使用する。

$$V = a\sigma \frac{\cosh k(h+z)}{\sinh kh} \cos(kx-\sigma t) \tag{5}$$

$$\dot{V} = a\sigma^2 \frac{\cosh k(h+z)}{\sinh kh} \sin(kx-\sigma t) \tag{6}$$

ここで　a＝波の振幅、σ＝角速度、k＝波数、h＝水深、t＝時間、x＝波の進行方向に正の水平座標、z＝静水面から下向きを正とする鉛直座標、(5)、(6)式によって水粒子速度、加速度が与えられるから、問題は(4)式の様な非線型方程式をいかに解くかに帰着される。

4.　運動方程式の解

線型振動方程式にも使用されるモード解析のテクニックをここにも使用する。(4)式において減衰項と外力の項を0とおけば、固有値問題として

$$\lceil M+C_M \rfloor \{\ddot{u}\}+[K]\{\dot{u}\}=\{O\} \tag{7}$$

が得られるが、ここで$\{u\}=\{X\}e^{i\omega t}$　と変換してやれば

$$\omega^2 \lceil M+C_M \rfloor \{X\}+[K]\{X\}=\{O\} \tag{8}$$

となる。ここでこの固有値問題を標準化するために$[Đ]^{-\frac{1}{2}}$という変換マトリックスを導入する。このマトリックスの非対角部分はすべて0で、第i行目の対角成分は$1/\sqrt{m_i+C_{Mi}}$の値をもつものとする。ここに、m_i、C_{Mi}はそれぞれ第i節点の集中質量、質量係数である。さて、

$$\{Y\}=[Đ]^{\frac{1}{2}}\{X\},\qquad [A]=[Đ]^{-\frac{1}{2}}[K][Đ]^{-\frac{1}{2}} \tag{9}$$

とおけば、(8)式は

$$[A]\{Y\}=\lambda\{Y\} \tag{10}$$

という固有値問題の標準形になる。ここに$[A]$は実対称マトリックスであり、$\lambda=\omega^2$は固有値である。この(10)式を何等かの数値計算手法、例えばJacobiの方法等で解けば、固有値と固有モードマトリックス$[\Phi]$が得られる。このマトリックスを使用して(4)式を分解することを考える。そのために真の変位$\{u\}$と一般化座標$\{Y\}$とを結びつける変換、

$$\{u\}=[\Phi]\{Y\} \tag{11}$$

を考える。これを(4)式にもちこんで、前から〔Φ〕の転置である〔Φ〕^{T} をかければ

$$[\Phi]^T\lceil M+C_M \rfloor[\Phi]\{\ddot{Y}\}+[\Phi]^T[C][\Phi]\{\dot{Y}\}+[\Phi]^T[K][\Phi]\{Y\}$$
$$=[\Phi]^T\lceil C_D \rfloor\{(\dot{V}-\dot{u})\,|\dot{V}-\dot{u}|\}+[\Phi]^T\lceil C_M \rfloor\{\ddot{V}\} \tag{12}$$

が得られる。ところが、固有値問題の特性として、次の二つの直交条件

$$[\Phi]^T\lceil M+C_M \rfloor[\Phi]=[I] \tag{13}$$

$$[\Phi]^T[K][\Phi]=\lceil \omega^2 \rfloor \tag{14}$$

が知られているので、(12)式は簡単にできる。ここで〔I〕は単位マトリックス、$\lceil \omega^2 \rfloor$ は固有値を対角線上に並べたものである。さて減衰マトリックスを質量や剛性に比例するものと仮定すれば、これもやはり次の様に対角化できることが知られている。

$$[\Phi]^T[C][\Phi]=\lceil 2\alpha\,\omega \rfloor \tag{15}$$

ここに α は減衰定数と臨界減衰定数との比である。(13)、(14)、(15)の関係を考慮すれば(12)式の左辺は、分解されて

$$\{\ddot{Y}\}+2\lceil \alpha\,\omega \rfloor\{\ddot{Y}\}+\lceil \omega^2 \rfloor\{Y\}$$
$$=[\Phi]^T\lceil C_D \rfloor\{|\dot{V}-\dot{u}|\,(\dot{V}-\dot{u})\}+[\Phi]^T\lceil C_M \rfloor\{\ddot{V}\} \tag{16}$$

の様になる。この式の右辺には絶対値が含まれておりその中に、もともとの構造変位速度 $\{\dot{u}\}$がはいっていることに注意されたい。この(16)式は右辺が非線型になっているので、解析解は不可能であるが次の様に差分近似を考えることによって、数値解をもとめらことは可能である。

$$\{\ddot{Y}\}_{t+\triangle t}+2\lceil \alpha\,\omega \rfloor\{\dot{Y}\}_{t+\triangle t}+\lceil \omega \rfloor\{Y\}_{t+\triangle t}$$
$$=[\Phi]^T\Big[\lceil C_D \rfloor\{(\dot{V}-\dot{u})\,|\dot{V}-\dot{u}|\}+\lceil C_M \rfloor\{\ddot{V}\}\Big]_t \tag{17}$$

(17)式の意味は、$\triangle t$ 時間だけ前の構造物変位速度から、波力を求め、それが $(t+\triangle t)$時間の振動を決定すると考えるのである。したがって、この時間刻み $\triangle t$が、かなり小さくないと(16)式を解いたことにならないが、この点については数値例で報告する。さて、(17)式を数値積分する手法は数多くあるが、我々は Runge-Kutta の手法を利用した。

5. 数値例

以上述べた手法を用いて、二、三の数値解を求めた。そこで考えるモデルは、一本のパイルを海底に固定した場合と、二次元、および三次元骨組構造物を設置した場合とである。詳しくは当日スライドで報告するが、ここに簡単に結果を要約しておこう。

(a) 一本のパイルの場合　　水深４０ｍの所に、海底から高さ５０ｍの長さを有するパイルに、波高６ｍ、周期６秒の波があったときの動的挙動を調べた。波は正弦的に振動するが、(4)式にみられる様な非線型性のために、パイルは正弦的に振動しなくて、波にのるような非線型挙動を示すことがわかった。波の周期だけを変化させて、パイルの一次固有周期に近づけて、パイル先端の変位量を計算したところ、変位振幅は増大する傾向がある。つまり、共振の現象がみられる。これは重要な結果で波の固有周期と構造物の固有周期が一致すると、振幅は非常に大きくなって破壊にいたることがあることを示している。次に波高だけを変化させて応答量を計算した所、両者は、ほぼ直線的に増大してゆくことがわかった。さて、(17)式のところで注意しておいた時間刻みの影響を数値的に調べた結果、こ

のmodelの場合、Δt=0.02 rec 以下にすれば、応答値は時間刻みの影響をうけたことがわかった。Δt=0.005、0.01、0.02秒の3 caseを比較した所、3者の間には1～2%位の誤差しかなかった。

(b) 平面骨組の場合　水深90 m の所の高さ100 m、巾20 m の平面フレームに周期10秒、波高6 m の波があった場合を検討した。このフレームの先端の変位は、波の周期を有する振動の上に非線型振動が重なった様な揺れ方をする。部材内力（曲げモーメント、剪断力、軸力）の応答を計算したところ波力が動的な繰り返し荷重になっていることがわかった。したがって、疲労破壊が引きおこされる危険性のあることが認識される。

(c) 三次元骨組の場合　三次元の場合、波の方向によって構造物の剛性が変化するので、波の方向を二方向にかえて、計算してみた。剛性の変化による応答のちがいが若干認められた。最後に同じ構造物を二次元、三次元解析して応答量の変化を調べた結果、三次元構造物の方が剛性が大きいのにもかかわらず、応答変位が大きくでた。これは、外力の方も節点数が多くなるため大きくなるのではないかと思われる。このことから実際の三次元構造物はそのまま三次元として解く必要があるだろうと考えられる。

6. 結論

(1) 規則波に対する動的応答は、決定論的な手法で決定できる。

(2) 構造物の応答変位は、波の正弦波上に、二義波が載った形になっている。その周期は構造物のほぼ、一次周期に等しいことが認められる。

(3) 波の周期が構造物の一次周期に近づくにつれ、共振現象がおこる。

(4) 構造物先端の変化は波高に比例する。

(5) 三次元解析においては、波の進行方向に対して、構造物の剛性が変化するため、波の向きも考慮して解析しなければならない。

以上、海中に骨組構造物を設置したときの規則波による挙動を(4)式にもとづいて説明したのであるが、ここで採用したのはdeterministicな手法で、実際の海面は不規則波を有するので、確率的な取扱いも必要である。しかし、確率的手法は全体としての構造物の安全性を検討できるが、個々の部材について、具体的にそのdimensionsを決める手段とはなり得ない。したがって我々は海中構造設計の一指針として、この様なdeterministicな立場をとったのである。なお本文中でspaceの関係上波力の考え方について、非常に簡単に述べたが、特にC_D、C_Mに関しては部材の幾何学的性状、流体場の性質、その他がからみあって、まだどの位の値をとって良いかが、確定しない現状である。特に一番問題になると思われるのは、物体が振動しているときのC_D、C_Mは物体が静止しているときに比べて変化するであろうということである。さらに部材が重なっている場合は、波が砕ける場合もあるので、その現象が、これらの係数にどの様な影響を及ぼすかも明らかにせねばならないが、これらの点に関しては実験にまたなければならない。結論にみられる振動特性も今後実験によって確められる必要がある。