

三井建設土木技術部 正員 高橋 豊
 上 同 正員 川澄 脩
 上 同 正員 ○尾形 宏文

1. 緒言

1961年1月15日、ニューヨーク港外 Ambrone 燈台の70哩東方沖に建設されたテキサスタ
 ワ-4号(TT-4)は、28人の人命と共に海没した。文献(8)に拠ると、この時約40 m/sの強
 風の中で、「塔が回転するような動き方で揺れ始めた。」と報告されている。この事は、海洋プラット
 フォームの様な脚柱支持の構造物は、曲げねじれ連成振動に因る運動を無視し得ない事を示している。

特に Tacoma Narrows 橋の落橋で強張されている空気力による「空力的負減衰効果」と波力に因る
 強制外力との連成振動は、これからの海洋構造物の設計には不可欠のものとなるであろう。この論文
 は、曲げねじれ連成振動の解析法と、その基礎となる諸理論を扱っている。

2. 海洋プラットフォームの静力学的解析

(1) 揺れの中心

海洋 Platform のような多脚柱の構造物が揺れる際に、どのような点を中心にして揺れるのかとい
 うことは、非常に興味深い弾性論の問題であるが、筆者はこれを変分問題(汎函数の停留問題)に帰
 着して解いた。いつか稿を改めて発表したい。ここでは疑問はあるが、建築の分野における「剛心(
 Center of Rigidity)」を紹介しておく。

Building には部材の配置から決定される「剛心」という
 点が存在する。これは「建物にねじれを起させないように
 水平に移動させることのできる力の作用点」として定義さ
 れるものであって、図Iにおいて、図心 C_F からの距離
 S_x, S_y は次式で求めることができる。図Iにおいて、
 C_R ; 剛心, C_F ; 図心, C_G ; 重心 である。

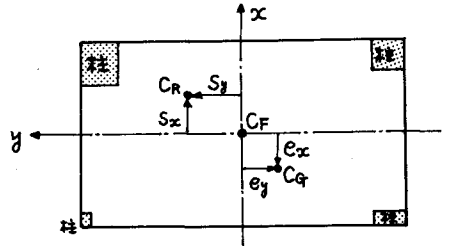


図-I

$$S_x = \frac{\sum_r D_{ry} l_{rx}}{\sum_r D_{ry}}, \quad S_y = \frac{\sum_r D_{rx} l_{ry}}{\sum_r D_{rx}} \quad \text{①}$$

D_{rx} ; r番目の水平抵抗材のx方向曲げ剛性 l_{rx} ; r番目の水平抵抗材のx座標
 D_{ry} ; " " " l_{ry} ; " " " " " "

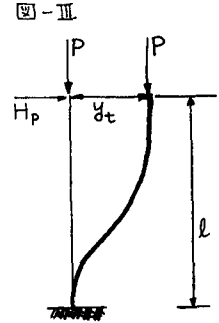
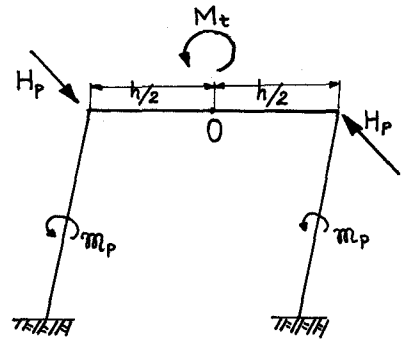
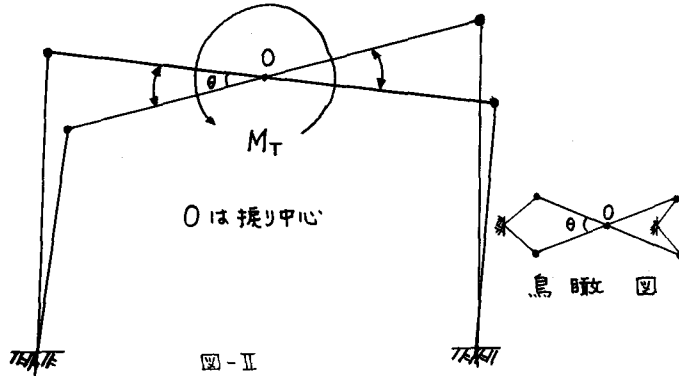
(2) 揺りの理論解析例

(イ) A型 この型は、脚柱と基礎との結合条件が、剛結と見なし得る場合である。

図IIのように最も簡単な例をとる。揺れの中心は一応脚柱の中心Oとする。このような脚柱群に
 、外力の揺りモーメント M_0 が作用したときの力の釣り合いを考える。(脚柱の力学的諸量は、いつ
 かも等しいものと仮定した。) そうすると次式が成立する。[*ここでは、2本のみの例をとった
 が、多脚柱群の場合は、この簡単な解析例から類推された。]

$$M_T + 2m_p + H_p h = 0 \quad (2)$$

ここで M_T は外力の捩れモーメント, m_p はいわゆる St. Venant の純捩れ抵抗であって, M_T に対し脚柱内の捩れせん断応力によって抵抗するものであり, H_p は脚柱のせん断力である。



いま, 外力 M_T によって捩られたとき, この構造系が θ radian だけ回転したとすると, 脚柱の先端は $y_t = \frac{h}{2} \cdot \theta$ だけ変位する。脚柱を“軸圧縮力 P を受ける両端固定梁”として解くと

$$y_t = \frac{H_p}{kP} \left\{ \frac{2(1 - \cos ke l)}{\sin ke l} - ke l \right\}, \quad k = \frac{P}{EI} \quad (3)$$

となる。従って, $H_p = \frac{h}{2} \cdot \frac{\theta_{top}}{Z}$ と表わされる。ここに Z は境界条件から求められるものであって, 両端固定のときは (3) より $Z = \frac{1}{kP} \left\{ \frac{2(1 - \cos ke l)}{\sin ke l} - ke l \right\}$ である。 m_p は GI_p を“ねじり剛性”とすると厳密には, $m_p = GI_p \frac{d\theta}{dx} = GI_p \cdot \frac{2}{h} \frac{dy}{dx}$ となるのであるが, ここは簡略式として, *

$$m_p = GI_p \cdot \frac{\theta_{top}}{l} = GI_p \cdot \frac{1}{l} \cdot \frac{y_t}{h/2} \quad (4)$$

を用いる。(3) (4) を (2) へ代入すると, $M_T + 2GI_p \cdot \frac{\theta_{top}}{l} + \frac{h}{2} \cdot \frac{\theta_{top}}{Z} \cdot h = 0$ より

$$\theta_{top} = - \frac{M_T}{\frac{2GI_p}{l} + \frac{h^2}{2Z}} \quad (5)$$

この式によって, “捩れのバネ定数 $k\theta$ ” を求める。

※ 厳密に言う, 多脚柱構造物の捩れのバネ定数 $k\theta$ は, 捩れ角 θ の函数となる。Deck が剛体であるとみなせる程曲げ剛性が大きくなるときは, 捩れの中心より遠い脚柱の撓みか大きいために, その脚柱は $\frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 dx$ ほど引き抜かれることになる。また, m_p は St. Venant の理論によると $\frac{d\theta}{dx}$ すなわち $\frac{dy}{dx}$ に比例するのであり, (4) のようではあり得ない。しかし m_p を $\frac{dy}{dx}$ の函数とすると, 脚柱内に生ずるせん断力 H_p も (2) より $\frac{dy}{dx}$ の函数となり, 結局, 計算不能となる。そこで m_p を $\frac{\theta_{top}}{l}$ に比例するとした簡略式を用いたのである。多脚柱群の捩れのバネ定数 $k\theta$ を厳密に求めることは, これからの課題である。

3. 海洋プラットフォームの曲げ振成振動

(1) 運動方程式

運動方程式は、重心 C_G の動きに関する x, y 方向 2 成分 u, v と重心まわりの回転 θ の 3 自由度に対して立てる。デッキは剛体と仮定している。図 7 参照。

重心と剛心との距離を各々 δ_x, δ_y とする。

剛心 C_R における変位は、 x 方向が $u - \delta_y \theta$ 、 y 方向が $v + \delta_x \theta$ となるから、 x, y 方向のバネ定数を各々、

k_x, k_y とすると、 x, y 方向に関する次の運動方程式が得られる。

$$m \frac{d^2 u}{dt^2} + k_x (u - \delta_y \theta) + C_x \frac{du}{dt} + C_\theta \frac{d\theta}{dt} = F_x \quad (a), \quad m \frac{d^2 v}{dt^2} + k_y (v + \delta_x \theta) + C_y \frac{dv}{dt} + C_\theta \frac{d\theta}{dt} = F_y \quad (b)$$

次に重心 C_G まわりの極慣性モーメントを I_G とすると、回転の慣性モーメントは、 $-I_G \frac{d^2 \theta}{dt^2}$ であり、これに対して抵抗するモーメントは、“剛心まわりの接水モーメント”と“剛心に働く層せん断力による、重心まわりのモーメント”とである。前者は、剛心まわりの接水のばね定数を k_θ とすれば、 $k_\theta \cdot \theta$ で表わされ、後者は、図 7 の座標系に対して、 $-k_x (u - \delta_y \theta) \delta_y + k_y (v + \delta_x \theta) \delta_x$ となる。よって

$$I_G \frac{d^2 \theta}{dt^2} + (k_\theta + k_x \delta_y^2 + k_y \delta_x^2) \theta - k_x \delta_y u + k_y \delta_x v + C_x \frac{du}{dt} + C_y \frac{dv}{dt} + C_\theta \frac{d\theta}{dt} = F_\theta \quad (c)$$

となる。ここに、 F_x, F_y, F_θ は、外力項であり、 C_x, C_y, C_θ は x, y, θ 方向の振動減衰項である。

(2) 減衰のある自由振動解析

減衰のある自由振動解析は、(a), (b), (c) 式の外力項 F_x, F_y, F_θ を 0 と置き、 $u = U e^{st}, v = V e^{st}, \theta = \Theta e^{st}$ と置いて代入すると、(d) 式が成立する。(d) 式において U, V, Θ が非零次解を持たないためには、(e) の行列式が 0 でなければならぬ。

$$\begin{pmatrix} (m\lambda^2 + C_x\lambda + k_x) \cdot U + 0 + (C_\theta\lambda - k_x\delta_y) \Theta = 0 \\ 0 + (m\lambda^2 + C_y\lambda + k_y) \cdot V + (C_\theta\lambda + k_y\delta_x) \Theta = 0 \\ (C_x\lambda - k_x\delta_y) \cdot U + (C_y\lambda + k_y\delta_x) \cdot V + [I_G\lambda^2 + C_\theta\lambda + (k_\theta + k_x\delta_y^2 + k_y\delta_x^2)] \Theta = 0 \end{pmatrix} (d), \quad \begin{vmatrix} (m\lambda^2 + C_x\lambda + k_x) & 0 & (C_\theta\lambda - k_x\delta_y) \\ 0 & (m\lambda^2 + C_y\lambda + k_y) & (C_\theta\lambda + k_y\delta_x) \\ (C_x\lambda - k_x\delta_y) & (C_y\lambda + k_y\delta_x) & [I_G\lambda^2 + C_\theta\lambda + (k_\theta + k_x\delta_y^2 + k_y\delta_x^2)] \end{vmatrix} = 0 \quad (e)$$

(e) 式を解くと、6 次の特性方程式ができる。この根を Routh-Hurwitz の判定条件を適用して判定すれば良い。この根から自由振動数が求まる。この構造物の動的安定性が吟味される。

(3) 減衰のある強制振動解析

いま、 x, y, θ 方向に各々、 $f_x \cdot e^{i\omega t}, f_y \cdot e^{i\omega t}, f_\theta \cdot e^{i\omega t}$ が作用するものとする。(a), (b), (c) より

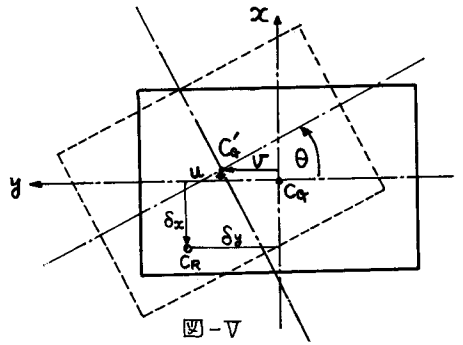
$$\left. \begin{aligned} m \frac{d^2 u}{dt^2} + k_x (u - \delta_y \theta) + C_x \frac{du}{dt} + C_\theta \frac{d\theta}{dt} &= f_x \cdot e^{i\omega t} \\ m \frac{d^2 v}{dt^2} + k_y (v + \delta_x \theta) + C_y \frac{dv}{dt} + C_\theta \frac{d\theta}{dt} &= f_y \cdot e^{i\omega t} \\ I_G \frac{d^2 \theta}{dt^2} + (k_\theta + k_x \delta_y^2 + k_y \delta_x^2) \theta - k_x \delta_y u + k_y \delta_x v + C_x \frac{du}{dt} + C_y \frac{dv}{dt} + C_\theta \frac{d\theta}{dt} &= f_\theta \cdot e^{i\omega t} \end{aligned} \right\} (f)$$

(f) 式が成立する。(f) を解くためには、
 $u = U \cdot e^{i(\omega t + \alpha_x)}, v = V \cdot e^{i(\omega t + \alpha_y)},$
 $\theta = \Theta \cdot e^{i(\omega t + \alpha_\theta)}$ と置いて、強制振動振幅 U, V, Θ 及び外力と変位の位相差 $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_\theta$

を求めれば良い。(f) に代入して、虚数部と実数部を分離して整理すると次のようになる。

$$\{(-m\omega^2 + k_x) \cos \alpha_x - \omega C_x \sin \alpha_x\} U - (k_x \delta_y \cos \alpha_x + \omega C_\theta \sin \alpha_x) \Theta = f_x \quad (g), \quad \sin \alpha_x = \frac{-\omega(C_x U + C_\theta \Theta)}{f_x} \quad (h)$$

$$\{(-m\omega^2 + k_y) \cos \alpha_y - \omega C_y \sin \alpha_y\} V + (k_y \delta_x \cos \alpha_y - \omega C_\theta \sin \alpha_y) \Theta = f_y \quad (i), \quad \sin \alpha_y = \frac{-\omega(C_y V + C_\theta \Theta)}{f_y} \quad (j)$$



$$-(k_x \delta_y \cos \alpha_0 + \omega C_x \sin \alpha_0) \cdot U + (k_y \delta_x \cos \alpha_0 - \omega C_y \sin \alpha_0) \cdot V + \{(-I_G \omega^2 + k_\theta + k_x \delta_y^2 + k_y \delta_x^2) \cos \alpha_0 - \omega C_\theta \sin \alpha_0\} \cdot \Theta = f_\theta \dots (k)$$

$$\sin \alpha_0 = \frac{-\omega(C_x U + C_y V + C_\theta \Theta)}{f_\theta} \dots (l),$$

これらの6式を用いて、未知数 $U, V, \Theta, \alpha_x, \alpha_y, \alpha_\theta$ を求めるには、次のようなくり返し計算を行えば良い。すなわち最初は位相差 $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_\theta$ を0とおき、(g), (k) (l)を連立させて解く。これは、(g), (k), (l)の U, V, Θ の係数を次のように置き、行列論より、

$$A_{11} = \{(-m\omega^2 + k_x) \cos \alpha_x - \omega C_x \sin \alpha_x\}, \quad A_{12} = 0, \quad A_{13} = -(k_x \delta_y \cos \alpha_x + \omega C_\theta \sin \alpha_x)$$

$$A_{22} = \{(-m\omega^2 + k_y) \cos \alpha_y - \omega C_y \sin \alpha_y\}, \quad A_{21} = 0, \quad A_{23} = (k_y \delta_x \cos \alpha_y - \omega C_\theta \sin \alpha_y)$$

$$A_{31} = -(k_x \delta_y \cos \alpha_0 + \omega C_x \sin \alpha_0), \quad A_{32} = k_y \delta_x \cos \alpha_0 - \omega C_\theta \sin \alpha_0, \quad A_{33} = \{(-I_G \omega^2 + k_\theta + k_x \delta_y^2 + k_y \delta_x^2) \cos \alpha_0 - \omega C_\theta \sin \alpha_0\}$$

$$U = \frac{\begin{vmatrix} f_x & a_{12} & a_{13} \\ f_y & a_{22} & a_{23} \\ f_\theta & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}, \quad V = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & f_x & a_{13} \\ a_{21} & f_y & a_{23} \\ a_{31} & f_\theta & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}, \quad \Theta = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & f_x \\ a_{21} & a_{22} & f_y \\ a_{31} & a_{32} & f_\theta \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$$

として、第1近似の U, V, Θ を求める。これを (h), (j), (l) に代入して第1近似の位相差 $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_\theta$ を求める。この $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_\theta$ を (m), (n) に代入して、第2近似としての U, V, Θ を求める。再び (h), (j), (l) によって、第2近似としての $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_\theta$ を求める。-----。この手順をくり返すことによって、実用上十分な精度の強制振動振幅 U, V, Θ と位相差 $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_\theta$ が求めることができる。(このくり返し計算の収束性の数学的証明はここでは省略する。)

4. 結論

海洋プラットフォームの問題点は、①波力及び風力による強制振動 ②空気力による空気力学的負減衰による自励振動の連成効果である。この研究は未だなされておらず、海洋構造物研究の盲点となっている。これからは、風と波とが海洋構造物に与える相乗効果の研究を推し進める必要がある。

また、多脚柱脚の接水のバネ定数 k_θ をここでは、constantとしたが、実際には θ の函数である。従って、振動方程式は、非線型性を有するものである。背の高い脚柱群の“ぬじれ中心の決定”と“バネ定数 k_θ の決定”は、本論文中の決定法をさらに押し推したい。サンフェルナントの地震報告(4), (5)によると、橋脚が水平面に回転した事が報告されている。「張り出し梁」が橋軸に直角方向の地震力を受けて傾倒される事は、十分に予想されることであり、本論文の解析法が、参考になれば幸いです。 k_θ を θ の函数として表現した非線型振動方程式としての解は、別に橋を改めたい。

終りに、参考文献の著者に深甚の謝意を表します。

【参考文献】

- (1) 堀川清司、東京大学大学院土木工学専攻課程講義「海洋土木工学特論」講義ノート、未刊
- (2) 伊藤学、田中宏、「充腹構造物の自励振動における空気力の特性」土木学会論文集 NO.168, 1969-8
- (3) 宮田利雄、岡内功、「吊橋の風による自励振動に関する一考察」土木学会論文集 NO.173, 1970-1
- (4) 土木学会耐振工学委員会「サンフェルナント地震(1971年2月)の震害について」上同, NO.195, 1971-II
- (5) 久保慶三郎、大久保忠良、横田潤、田村浩一「サンフェルナント地震の耐震設計に対する教訓」土木学会誌、Vol.57, 4頁、1972年
- (6) 井島武士、「海岸工学」朝倉書店、朝倉土木工学講座19(6)井島、田淵、湯村「有限水深の波による矩形断面物体の運動と波の变形」1972年
- (7) 合田良史「Wave Force on a Vertical Circular Cylinder; Experiment and a Proposed Method of Wave Force Computation」R1964年
- (8) 長崎作治「海洋構造物の設計と施工」森北出版、(9)岸方「水理学演習(1),(2)」学敵社(10)吉川秀夫「波動中の物体の振動 25周年記念」に際して32-3の要旨、筑波大学
- (11) 橋本一郎、荒木丈夫「水理学演習上」森北出版、(12)本間仁「水理学」丸善(13)小川元「港湾工学演習」学敵社(14)権貝博英、筑波大学