

I はじめに

最近の構造解析法は、マトリックス構造解析法、あるいは、有限要素法と呼ばれる新しい手法が、急速に進歩しているが、これとともに、マトリックスの掛け算による移行計算を主体とした伝達マトリックス法 (transfer matrix method) とよばれる解法が發展してきている。伝達マトリックス法における演算マトリックスの大きさは、状態量ベクトルを伝達する部材数によって決まり、格点総数、部材総数には関係しないので電子計算機を使用する上で非常に有利であること、又理論体系がわかりやすく、計算手順が機械的であること等の理由により、振動解析等に広く応用され、けた橋の固有振動数の計算についてもいくつかの計算例が発表されている。

ここでは、伝達マトリックス法を用い、集中質量による慣性力を受ける図1に示す骨組の固有振動数の計算を行なったので、以下に、その結果を発表したい。

II 定義

立体的な変形をする部材の変位と断面力とを、おののおのの座標軸に関する物理量として次のように定義する。

- | | | |
|-------------------|----------|----------|
| X軸
に
関
し | 軸方向変位 | U |
| | 軸方向力 | N |
| | ねじれ角 | α |
| | ねじりモーメント | T |
| Y軸
に
関
し | たわみ | v |
| | せん断力 | V |
| | たわみ角 | ϕ |
| Z軸
に
関
し | たわみ | w |
| | せん断力 | Q |
| | たわみ角 | ψ |
| | 曲げモーメント | M_z |

- スパン $l = 8.0 \text{ m}$
- 高さ $h = 8.0 \text{ m}$
- 端スパン $l' = 3.0 \text{ m}$
- 直角方向スパン $a = 5.6 \text{ m}$
- 集中質量 $M = 100 \text{ ton}$ (スパン中央)
- " $m' = 50 \text{ ton}$ (端部)

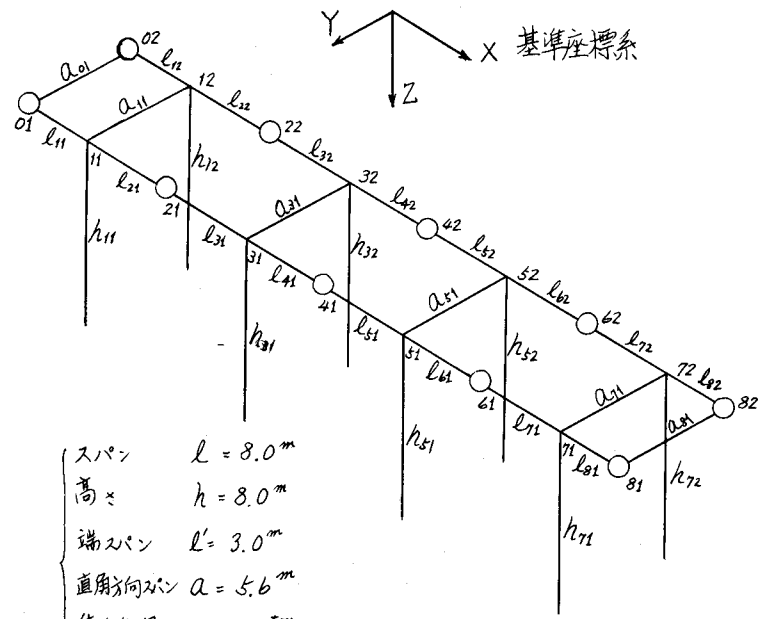


図1 高架橋骨組のモデル

変位 $q_i^g = \begin{bmatrix} U \\ v \\ w \\ \alpha \\ \phi \\ \psi \end{bmatrix}_i^g$, $q_x^g = \begin{bmatrix} v \\ w \\ \phi \\ \psi \end{bmatrix}_x^g$, 断面力 $Q_x^g = \begin{bmatrix} T \\ M \\ N \\ V \\ Q \end{bmatrix}_i^g$, $Q_x^g = \begin{bmatrix} T \\ M \\ N \\ V \\ Q \end{bmatrix}_x^g$

ただし、変位と断面力の正の向きは、部材の左端においては、正方向にとるが、右端においては、変位は、左端と同じく正方向にとり、断面力は、負の方向に作用する場合を正にとる。

III 伝達マトリックスによる計算法

曲げのみを受けるはりの基礎方程式について考えてみると、剛性 EI_y が一定で、曲げのみを受ける長さ l の部材の両端における物理量の関係式は、次のようにマトリックス表示することができる。

$$\begin{bmatrix} w \\ \phi \\ M \\ Q \end{bmatrix}^R = \begin{bmatrix} 1 & -l & \frac{l^2}{2}EI_y & \frac{l^3}{6}EI_y \\ 0 & 1 & -lEI_y & -\frac{l^2}{2}EI_y \\ 0 & 0 & 1 & l \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ \phi \\ M \\ Q \end{bmatrix}^L \quad \text{---(これを短縮し } \mathbf{V}^R = \mathbf{FV}^L \text{ と書く)---} \quad (1)$$

式(1)は、格間伝達式とよばれ、列ベクトルの右肩に付した R, L は、それぞれ、はり要素の右端および左端を意味する。同様に、格点伝達式は、枝部材の断面力と変位の関係、変位の適合条件、力のつりあい条件から求められるが、これらの格間伝達マトリックスと格点伝達マトリックスとの前掛けによって、構造物の左端における自由度を右端まで伝達し、右端における境界条件を利用して、左端の自由度を決定し、ふたたび、左から右へ、構造物の各部材の物理量を要素とする状態量ベクトルを求めていく方法である。

IV 高架橋骨組の伝達マトリックスおよび伝達計算法

図1に示す骨組について、基準座標系の X 軸方向の部材を主部材とし、それぞれの格点において、主部材から分岐している Y, Z 軸方向の部材を、枝部材とする。各部材に対して12個の物理量を、すべて考慮する場合の主部材の格間伝達式は、次のように表わされる。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \end{bmatrix}_K^R = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{K1} & 0 \\ 0 & \mathbf{F}_{K2} \end{bmatrix}_K \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \end{bmatrix}_K^L \quad \text{---(2)}$$

$$\mathbf{F}_{K1}, \mathbf{F}_{K2} = \begin{bmatrix} f & f' \\ 0 & f \end{bmatrix} \quad f = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \alpha \\ & & 1 & & & -\alpha \\ & & & 1 & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix} \quad f' = \begin{bmatrix} & & & & & -\frac{\alpha}{\beta u} \\ & & & & & -\frac{\alpha^2}{2\beta'} \\ & & & & & \frac{\alpha^3}{6\beta} \\ & & & & & \frac{\alpha^3}{6\beta} \\ & & & & & -\frac{\alpha}{\beta t} \\ & & & & & -\frac{\alpha}{\beta} \\ & & & & & -\frac{\alpha^2}{2\beta} \\ & & & & & -\frac{\alpha}{\beta'} \\ & & & & & \frac{\alpha^2}{2\beta'} \end{bmatrix}$$

ただし、 $\alpha, \beta, \beta', \beta_t, \beta_u$ は、無次元化のための基準定数を適当に定めることにより、次のように定められる部材の長さ、剛性、ねじり剛性、断面積を表わす数値である。

$$\alpha = l/l_0, \quad \beta = EI_y/EI_{y0}, \quad \beta' = EI_z/EI_{z0}, \quad \beta_t = GJ/EJ_0, \quad \beta_u = EF/EF_0$$

同様に、格点伝達式は、次のように表わされる。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \end{bmatrix}_{K+1}^L = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{K1} & \mathbf{B}_{K1} \\ \mathbf{B}'_{K1} & \mathbf{P}_{K2} \end{bmatrix}_K \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \end{bmatrix}_K^R \quad \text{---(3)}$$

$$\mathbf{P}_{K1} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_6 & \mathbf{O}_6 \\ -\mathbf{K}_{11}^a + \mathbf{K}_{22}^h & \mathbf{I}_6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}_{K2} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_6 & \mathbf{O}_6 \\ \mathbf{K}_{22}^a + \mathbf{K}_{22}^h & \mathbf{I}_6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_{K1} = \begin{bmatrix} \mathbf{O}_6 & \mathbf{O}_6 \\ -\mathbf{K}_{12}^a & \mathbf{O}_6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}'_{K1} = \begin{bmatrix} \mathbf{O}_6 & \mathbf{O}_6 \\ \mathbf{K}_{21}^a & \mathbf{O}_6 \end{bmatrix}$$

ここに、 \mathbf{I}_6 は (6×6) の単位マトリックス、 \mathbf{O}_6 は (6×6) の零マトリックスを表わす。

又、基準座標系に関して、変換された枝部材の剛性マトリックスは、次のとおり。

ただし、添字 a は、はり部材、 h は柱部材を表わす。

$$\overline{K_{11}^a} = A_f^{aT} [K_{11}^a] A_d^a = \begin{bmatrix} -\frac{6\beta}{\alpha^2} & \frac{4\beta}{\alpha} & & \\ \frac{6\beta'}{\alpha^2} & & \frac{\beta t}{\alpha} & \\ \frac{12\beta'}{\alpha^3} & & & \frac{4\beta'}{\alpha} \\ & \frac{\beta u}{\alpha} & & \frac{6\beta'}{\alpha^2} \end{bmatrix}, \quad \overline{K_{22}^a} = A_f^{aT} [K_{22}^a] A_d^a = \begin{bmatrix} -\frac{6\beta}{\alpha^2} & -\frac{4\beta}{\alpha} & & \\ & -\frac{\beta t}{\alpha} & & -\frac{4\beta'}{\alpha} \\ \frac{6\beta'}{\alpha^2} & & \frac{6\beta'}{\alpha^2} & \\ \frac{12\beta'}{\alpha^3} & & & \frac{6\beta'}{\alpha^2} \end{bmatrix}$$

$$\overline{K_{21}^a} = A_f^{aT} [K_{21}^a] A_d^a = \begin{bmatrix} -\frac{6\beta'}{\alpha^2} & & & \\ \frac{12\beta'}{\alpha^3} & & & \\ & \frac{\beta u}{\alpha} & & \\ & & \frac{\beta t}{\alpha} & \\ & & & -\frac{2\beta'}{\alpha} \end{bmatrix}, \quad \overline{K_{12}^a} = A_f^{aT} [K_{12}^a] A_d^a = \begin{bmatrix} -\frac{6\beta'}{\alpha^2} & & & \\ & -\frac{2\beta'}{\alpha} & & \\ \frac{6\beta'}{\alpha^2} & & & \\ \frac{12\beta'}{\alpha^3} & & & \frac{6\beta'}{\alpha^2} \end{bmatrix}$$

$$A_d^a = \begin{bmatrix} C_a & 0 \\ 0 & C_a \end{bmatrix}, \quad A_h^a = \begin{bmatrix} C_h & 0 \\ 0 & C_h \end{bmatrix}, \quad A_f^{aT} = \begin{bmatrix} C_a^T & 0 \\ 0 & C_a^T \end{bmatrix}, \quad A_h^{aT} = \begin{bmatrix} C_h^T & 0 \\ 0 & C_h^T \end{bmatrix}, \quad C_a = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C_h = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

固定部伝達式は、変位およびモーメントが連続であり、軸力およびせん断力には、固定の慣性力が加わることになり、次のように表わされる。

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}_{K+1}^L = \begin{bmatrix} M_{K1} & 0 \\ 0 & M_{K2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}_K^R \quad \text{----- (4)}$$

$$M_{K1}, M_{K2} = \begin{bmatrix} I_b & 0_b \\ m & I_b \end{bmatrix} \quad m = \begin{bmatrix} 0 & \text{-----} & 0 \\ \cdot & & \cdot \\ 0 & \text{-----} & 0 \\ m_k \omega^2 & 0 & \text{-----} & 0 \\ 0 & m_k \omega^2 & 0 & \text{-----} & 0 \\ 0 & 0 & m_k \omega^2 & 0 & \text{-----} & 0 \end{bmatrix}$$

左端の境界条件式は、左端の変位を自由度とすることにより、次のように表わされる。

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}_1^L = \begin{bmatrix} R_1 & S_1 \\ S_1' & R_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}^L \quad \text{----- (5)}$$

$$R_1 = \begin{bmatrix} I_b \\ -K_{11}^a \end{bmatrix}, \quad R_2 = \begin{bmatrix} I_b \\ K_{22}^a \end{bmatrix}, \quad S_1 = \begin{bmatrix} 0_b \\ -K_{12}^a \end{bmatrix}, \quad S_1' = \begin{bmatrix} 0_b \\ K_{21}^a \end{bmatrix}, \quad A_i^L = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ \theta \\ \phi \\ \psi \end{bmatrix}_i$$

基準座標系に関して変換された枝部材の剛性マトリックス、 $\overline{K_{ij}^a}$ は、格点伝達マトリックスの場合と同じ形である。又右端における境界条件式は

$$\begin{bmatrix} R_1' & 0 \\ 0 & R_2' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}_{n+1}^L = 0 \quad \text{----- (6)}$$

$$R_1' = [0_b | I_b], \quad R_2' = [0_b | I_b]$$

以上の伝達マトリックスを用いて、左端の状態量ベクトルの伝達計算を行ない、両端の境界条件式を代入し、これより次の振動数方程式を得る。

$$\Delta = \begin{bmatrix} R'_1 & 0 \\ 0 & R'_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{81} & B_{81} \\ B'_{81} & P_{82} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{81} & 0 \\ 0 & M_{82} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{81} & 0 \\ 0 & F_{82} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{71} & B_{71} \\ B'_{71} & P_{72} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{71} & 0 \\ 0 & F_{72} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{61} & 0 \\ 0 & M_{62} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{61} & 0 \\ 0 & F_{62} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{51} & B_{51} \\ B'_{51} & P_{52} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{51} & 0 \\ 0 & F_{52} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{41} & 0 \\ 0 & M_{42} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} F_{41} & 0 \\ 0 & F_{42} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{31} & B_{31} \\ B'_{31} & P_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{31} & 0 \\ 0 & F_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{21} & 0 \\ 0 & M_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{21} & 0 \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{11} & B_{11} \\ B'_{11} & P_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{11} & 0 \\ 0 & F_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{01} & 0 \\ 0 & M_{02} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_1 & S_1 \\ S'_1 & R_2 \end{bmatrix} \\ = 0 \quad \text{----- (7)}$$

上式において、固有振動数 ω は、未知要素として、演算部伝達マトリックスにはいっているので、実際の計算では、 ω を仮定して、行列式 Δ を計算し、 $\Delta=0$ になる ω を求めた。又計算に当っては、各骨組のデータを無次元化し、各格点ごとに、新しい格点の変位を未知量とする関係式に変換して、伝達計算を行ない、数値計算の安定をはかった。

V 計算結果

計算に当って用いた骨組データは、表1のとおりであり、計算結果は、図2のとおりであるが、これ以上の高次振動については省略した。又電算機FACOM 230-60の、行列式の値 Δ を一回計算するのに必要な時間は、約4秒であり、

表1 計算に用いた骨組データ

Δ の値の最大は、 10^5 程度の値であった。なおヤング係数は、 $3.5 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$ を使用した。

(参考文献)

コンピュータによる構造工学講座I-2-B
伝達マトリックス法

種別 部材	骨組長さ (m)	Y軸初期剛性 (m^4)	Z軸初期剛性 (m^4)	ねじり剛性 ($\text{t}\cdot\text{m}^2/\text{sec}^2$)	骨組断面積 (m^2)
線路方向はり	8.0	0.160	12.0	0.9×10^6	1.80
(同張出部はり)	3.0	0.160	12.0	0.9×10^6	1.80
直角方向はり	5.6	0.120	30.0	0.9×10^6	1.50
(同端はり)	5.6	0.060	30.0	0.9×10^6	0.71
柱	8.0	0.034	0.034	0.5×10^6	0.64

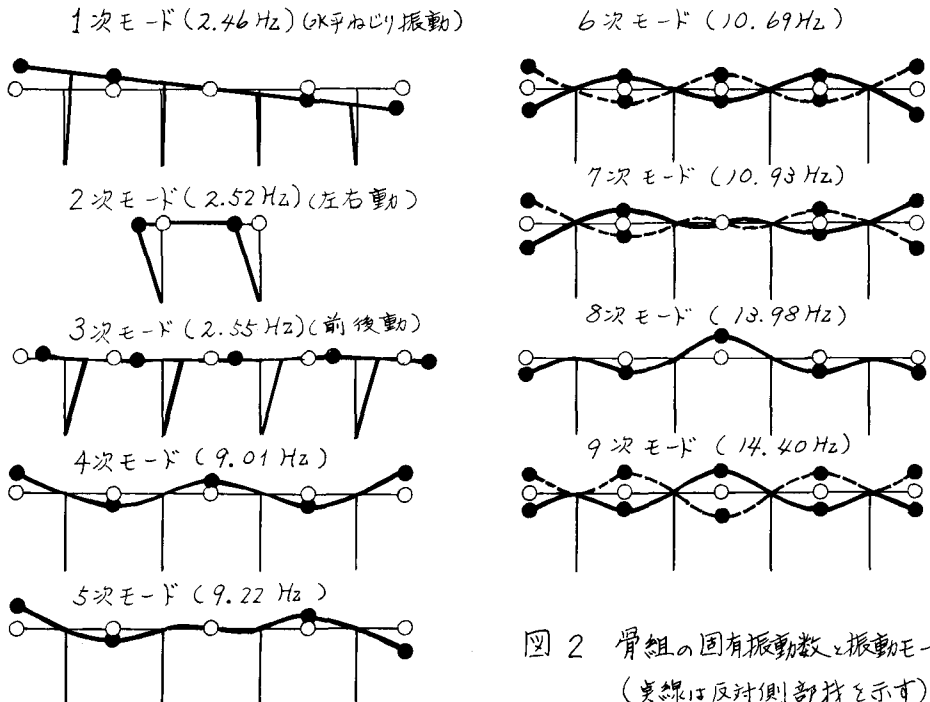


図2 骨組の固有振動数と振動モード
(実線は反対側部材を示す)