

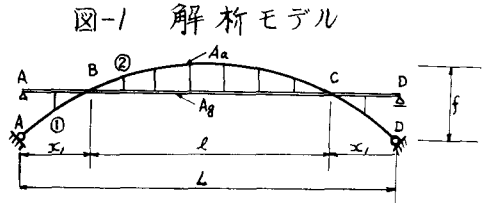
熊本大学 正員 吉村虎蔵  
同 学生員 水田洋司

熊本大学 正員 平井一男  
佐伯鶴城高校 庄司清美

筆者等は、下略式および上略式補剛アーチ橋の固有値を、動的結合法によって解く方法を発表した<sup>(1,2)</sup>。この方法の特長は結合力が1つだけよく、固有行列の次数が1であることである。ここでは中略式補剛アーチ橋の固有値を動的結合法によって解く方法と解析結果について報告する。まずアーチの一部を水平方向に変位を拘束した場合について理論をたてた。さらにこの場合とアーチの水平変位が自由の場合、および上略式、下略式の場合との固有値の比較をし、アーチの水平拘束効果をも調べた。この解析理論は、中略式で水平無拘束のとき、および下略式、上略式補剛アーチ橋の固有値解析を特殊なケースとして含み、単支間の場合の一般式といえることができる。

1. アーチの変位を水平方向に拘束した中略式補剛アーチ橋の固有値の解析理論

解析モデルとしては図-1のモデルを考え、従来と同じような仮定<sup>(1)</sup>を設けて解析を行う。中略式の場合、モード： $\varphi = \sum a_n \sin \frac{n\pi x}{L}$  のうち、 $n=1,3,5,\dots$ の対称振動に対しては、アーチクラウンは動かないけれども、B点では、アーチは水平方向に変位し



うとし、A点がヒンジ止めされているから、補剛桁はその水平方向の変位を拘束しようとする。一方、C点の水平拘束力はD点がローラのため、明らかに零であるから、橋全体としては、水平拘束力が非対称となり、 $n=1,3,5,\dots$ だけよりなる対称振動は存在しない。 $n=2,4,6,\dots$ の逆対称振動についても同様の事が言える。だから図-1のモデルの固有値を対称振動と逆対称振動の2つのケースに分けて解析することはできない。

1.1 適合条件

鉛直振動モードは、

$$\varphi(x) = \sum_{n=1,2,\dots} a_n \cdot \sin(n\pi x/L) \tag{1}$$

アーチスパンの伸び  $\Delta l_a$  は文献(1)によれば、

$$\Delta l_a = \sum_j \Delta x_j = \sum_j \Delta h_j \tan \alpha_j - \sum_j \sec \alpha_j \cdot \Delta A_j \tag{2}$$

ここに、 $\Delta h_j$ は相隣る格点の鉛直たわみ、 $\alpha_j$ はアーチ截の水平からの傾き

$\Delta A_j$ は軸力によるアーチの縮み

AB間、ABC間、ABCD間の適合条件(アーチの伸びと補剛桁の伸びの関係)とB点、C点での水平力の釣合条件より次式を得る。

$$\frac{L}{A_g E} \begin{bmatrix} \frac{x_1}{L} + \frac{A_g}{A_a} B_1 & 0 & -\frac{x_1}{L} \\ \frac{x_1}{L} + \frac{A_g}{A_a} B_1 & \frac{l}{L} + \frac{A_g}{A_a} B_2 & -(\frac{x_1}{L} + \frac{l}{L}) \\ \frac{A_g}{A_a} B_1 & \frac{A_g}{A_a} B_2 & \frac{A_g}{A_a} B_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \end{bmatrix} = \sum a_n \begin{bmatrix} f_1(n) \\ f_1(n) + f_2(n) \\ f_1(n) + f_2(n) + f_3(n) \end{bmatrix} \tag{3}$$

簡単に上式を次の様に書くことにする。

$$\frac{L}{A_g E} \cdot C \cdot H = \sum a_n \cdot f \tag{3'}$$

ここに、Cは式(3)の左辺の正方マトリックスで、fは右辺の列ベクトルを表わす。

$$f_1(n) = \frac{4f}{L} \left\{ \frac{l}{L} \sin(n\pi x_1/L) + \frac{2}{n\pi} (1 - \cos(n\pi x_1/L)) \right\}$$

$$\begin{aligned}
 f_2(m) &= \frac{4f}{L} \left\{ -\frac{L}{L} \left( \sin \frac{\pi x_1}{L} + \sin \frac{\pi(L-x_1)}{L} \right) + \frac{2}{\pi L} \left( \cos \frac{\pi x_1}{L} - \cos \frac{\pi(L-x_1)}{L} \right) \right\} \\
 f_3(m) &= \frac{4f}{L} \left\{ \frac{L}{L} \sin \frac{\pi(L-x_1)}{L} + \frac{2}{\pi L} \left( \cos \frac{\pi(L-x_1)}{L} - \cos \pi \right) \right\} \\
 B_1 &= \frac{1}{2} \left\{ 1 - \frac{L}{L} + 8 \left( \frac{f}{L} \right)^2 \left( 1 - \left( \frac{L}{L} \right)^3 \right) + 19.2 \left( \frac{f}{L} \right)^4 \left( 1 - \left( \frac{L}{L} \right)^5 \right) \right\} \\
 B_2 &= \frac{L}{L} + 8 \left( \frac{f}{L} \right)^2 \left( \frac{L}{L} \right)^3 + 19.2 \left( \frac{f}{L} \right)^4 \left( \frac{L}{L} \right)^5, \quad B_3 = B_1
 \end{aligned}$$

$H_1, H_2, H_3$  はそれぞれアーチ AB, BC, CD の軸力の水平成分であり、 $a_n f_1(m), a_n f_2(m), a_n f_3(m)$  は同じくアーチのそれぞれの部分の  $\int \tan \alpha \cdot d\varphi$  の値である(式(2))。式(3)において、 $f_1(m), f_2(m), f_3(m)$  は、いかなる  $m$  の値に対しても、同時に零にならない。また左辺の係数行列式  $\neq 0$  であるから、 $H_1, H_2, H_3$  は同時に零にならない。

## 1.2 振動数方程式

図-1 のアーチの①点、B点、②点、C点における鉛直方向の力の釣合いを考えると、アーチの各部分では、等分布荷重  $P_1, P_2, P_3$  が作用し、アーチと補剛桁の交差点 B, C では等分布荷重の他に集中荷重  $P_1, P_2$  も考慮する必要がある。故に補剛桁に作用する外力は図-2 のようになる。よ、 $\omega_n$  を補剛桁の  $n$  次の標準化モード、固有値とすると、この場合の運動方程式は

$$\ddot{w}_n(x) + \omega_n^2 w_n(x) = \ddot{\phi}_n(x) \left\{ \int_0^L \ddot{\phi}_n(x) P_1 dx \sin \omega t + \sum_j \ddot{\phi}_n(x) P_j \sin \omega t \right\}$$

故に  $w(x) = \sum w_n(x)$

$$\begin{aligned}
 &= \sum \frac{1}{\omega_n^2 - \omega^2} \ddot{\phi}_n(x) \left\{ P_1 \int_0^L \ddot{\phi}_n(x) dx + P_{j_2} \int_{L-x_1}^{L-x_2} \ddot{\phi}_n(x) dx + P_{j_3} \int_{L-x_2}^L \ddot{\phi}_n(x) dx + \ddot{\phi}_n(x) P_1 + \ddot{\phi}_n(x) P_2 \right\} \sin \omega t \\
 &= \sum \frac{1}{(\pi^2 - \lambda^2) EI \pi^2} \left\{ \frac{P_1}{L} (F_1(m) + F_{P_1}(m)) + \frac{P_{j_2}}{L} (F_2(m) - F_{P_1}(m) - F_{P_2}(m)) + \frac{P_{j_3}}{L} (F_3(m) + F_{P_2}(m)) \right\} \sin \omega t \quad (4)
 \end{aligned}$$

$$\text{ここに、} F_1(m) = (1 - \cos(\pi x_1/L)) / \pi L,$$

$$F_{P_1}(m) = \frac{1}{2} \left( \frac{L}{L} \right) \sin(\pi x_1/L),$$

$$F_2(m) = (\cos(\pi x_1/L) - \cos(\pi(L-x_1)/L)) / \pi L,$$

$$F_{P_2}(m) = \frac{1}{2} \left( \frac{L}{L} \right) \sin(\pi(L-x_1)/L),$$

$$F_3(m) = (\cos(\pi(L-x_1)/L) - \cos \pi) / \pi L,$$

$$\lambda = \omega/\omega_n = \omega / \left( \frac{\pi}{L} \right)^2 \sqrt{EI/\rho}$$

ところで、 $a_n = \max w_n(x)$  であるから、式(3)の  $a_n$  の代りに  $w_n(x)$  の最大値 ( $\sin \omega t = 1$ ) を代入し、さらに  $H_i/L^2 = P_i$  ( $i=1,2,3$ ) を代入する。また、この時  $P$  は  $P_2$  で表わせるから、次式を得る。

$$C' P_2 = \Omega^2 P_2 \quad (5)$$

$$\text{ここに、} C' = (\pi^2 EI / \rho A g f L) \cdot C, \quad \Omega = \sum \frac{1}{\pi^2 - \lambda^2} \pi^2 F, \quad \text{ただし } F = \{ F_1(m) + F_{P_1}(m), F_2(m) - F_{P_1}(m) - F_{P_2}(m), F_3(m) + F_{P_2}(m) \}$$

$$\text{自由振動している時、外力は働かないから、} P_2 + P_3 = 0 \quad (6)$$

$$\text{式(6)を式(5)に代入して} \quad (C' + \Omega^2) P_2 = 0 \quad (7)$$

$$\text{結合力 } P_2 \neq 0 \text{ のとき} \quad \det |C' + \Omega^2| = 0 \quad (8)$$

振動数方程式および固有値が求まったから、これを式(7)に代入して、 $P$  の比を求め、これを式(4)に代入して、モードを求めることができる。

## 2. その他の場合の振動数方程式について

### 2.1 水平拘束のない中跨式補剛アーチ橋

水平拘束のない場合には、 $H_1 = H_3$  となり、式(3)は次のように書き換えることができる。

$$\frac{L}{A g E} \begin{bmatrix} -\frac{L}{L} & \frac{L}{L} + \frac{A g}{A_a} B_2 \\ \frac{2 A g}{A_a} B_1 & \frac{A g}{A_a} B_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{bmatrix} = \sum a_n \begin{bmatrix} f_2(m) \\ f_1(m) + f_2(m) + f_3(m) \end{bmatrix} \quad (9)$$

以下、水平拘束のある場合と同様の方法で求めることができ、固有行列式は2次となる。このときは

対称振動と逆対称振動に分けて計算できるが、逆対称振動は補剛桁だけの逆対称振動に等しいから、対称振動についてだけ式(9)を用いて計算すればよい。ただし、 $n=1, 3, 5, \dots$

### 2.2 上路式補剛アーチ橋

水平拘束のある場合は、式(3)に相当する式は、式(3)において $H_2=0$ としそれに対応する行と列を取り除き、 $l=0$ とおいだ式となる。すなわち、

$$\frac{L}{A_g E} \begin{pmatrix} \frac{L}{L} + \frac{A_g}{A_a} B_1 & -\frac{L}{L} \\ \frac{A_g}{A_a} B_1 & \frac{A_g}{A_a} B_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_1 \\ H_3 \end{pmatrix} = \sum a_n \begin{pmatrix} f_1(n) \\ f_1(n) + f_3(n) \end{pmatrix} \quad (10)$$

この場合の固有行列式は、式(10)に対応して2次となる。また水平拘束のない場合は、式(3)に相当する式は、式(9)で $l=0$ とおいだ式で次式となる。

$$\frac{2L}{A_a E} B_1 \cdot H_1 = \sum a_n (f_1(n) + f_2(n)) \quad (11)$$

この場合も対称振動と逆対称振動に分けることができ、対称振動についてだけ式(11)を解ればよい。

### 2.3 下路式補剛アーチ橋

前述の式(3)に相当する式は式(3)において $H_1, H_3$ に関する行と列を取り除いた式である。すなわち、

$$\frac{L}{A_g E} \left( \frac{L}{L} + \frac{A_g}{A_a} B_2 \right) \cdot H_2 = \sum a_n f_2(n)$$

この場合も対称振動についてのみ解ればよい。ただし  $n=1, 3, 5, \dots$

## 3. 数値計算

諸元は表-1に示す戸崎橋を例にとり、中路式で  $\frac{L}{L}=0.1$ 、 $\frac{L}{L}=0.25$ の各々について水平拘束のある場合無拘束の場合の固有値とモード、撓みの影響線の計算を行い、その結果を表-2と図-3、図-4に示す。また結果の比較検討のために同じ諸元を用いて計算した上路式、下路式の固有値を表-2に記している。固有値の収束を調べるために、水平拘束の場合は、 $n=6, 10, 15$  について、無拘束の場合は  $n=8, 10, 12$  について調べた結果、両方とも  $n=10$  で収束するので、 $n$  の値は10までとり数値計算を行った。

表-1 戸崎橋の諸元

	数 値
支 間	$1.392 \times 10^4$ cm
ラ イ ズ	$1.92 \times 10^3$ cm
補剛桁の断面積	562.35 cm <sup>2</sup>
アーチの断面積	345.40 cm <sup>2</sup>
桁の断面2次モーメント	$6.232 \times 10^6$ cm <sup>4</sup>
弾性係数	$2.1 \times 10^6$ kg/cm <sup>2</sup>
橋の全質量	$4.4217 \times 10^3$ kg/m <sup>2</sup> cm

表-2 固有値比較

(係数:  $(\frac{L}{L})^2 \sqrt{EI/P}$ )

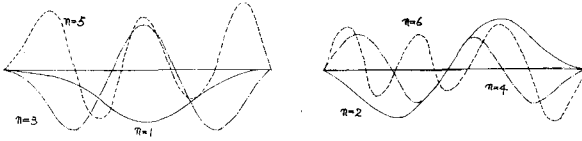
橋の種類		次数 (n)	1	2	3	4	5	6
単純桁			1	4	9	16	25	36
下路式アーチ			7.132	4	9.949	16	25.05	36
上路式アーチ	水平拘束		7.853	7.843	11.125	16	25.09	36.072
	無拘束		7.852	4	11.12	16	25.09	36
中路式アーチ	$\frac{L}{L}=0.1$	水平拘束	8.926	7.132	14.31	21.45	32.23	41.47
		無拘束	8.867	4	14.20	16	30.93	36
	$\frac{L}{L}=0.25$	水平拘束	8.490	10.78	18.07	16.36	25.64	36.49
		無拘束	8.490	4	16.75	16	25.55	36

## 4. 結び

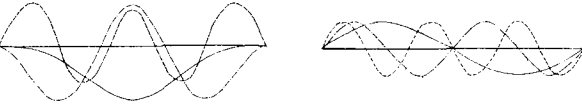
便宜上、表-2では、各形式のアーチ橋の固有値を、単純桁の1次、2次、…のモードに対応すると思われるモードの順に並べて、1次、2次、…と名付けてあるが、この解析モデルについては、次のことが言えると思う。

図-3 モード

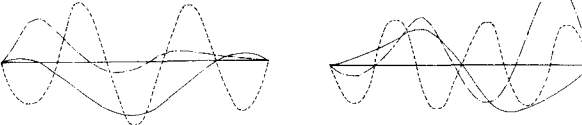
(a) 水平拘束  $\frac{Z_2}{L} = 0.1$



(b) 無拘束  $\frac{Z_2}{L} = 0.1$



(c) 水平拘束  $\frac{Z_2}{L} = 0.25$



(d) 無拘束  $\frac{Z_2}{L} = 0.25$

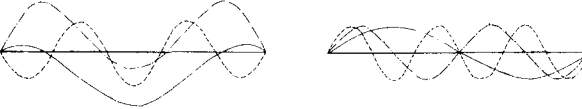
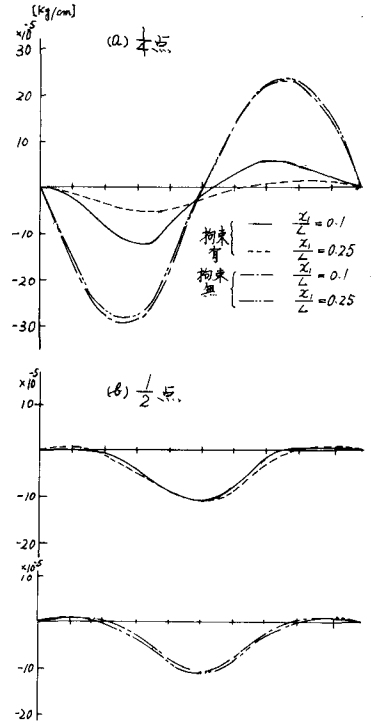


図-4 撓みの影響線



1次固有値については、下路式より上路式が高く、さらに中路式無拘束の場合が高くなる。また中路式において水平拘束の効果は  $\frac{Z_2}{L} = 0.25$  のときよりも  $\frac{Z_2}{L} = 0.1$  の場合に現われる。2次固有値については、下路、上路無拘束、中路無拘束の場合とも補剛桁のみの2次固有値と等しく、アーチは働かない。しかしながら水平拘束の場合、その効果が著しく現われ、上路式では無拘束時の約1.9倍、中路式では  $\frac{Z_2}{L} = 0.1$  のとき1.8倍、 $\frac{Z_2}{L} = 0.25$  のとき2.7倍にも高くなる。水平拘束効果が最小固有値において最も著しいことは注目すべきことである。3次固有値においても、下路、上路の場合よりも中路式の方が高い。4次においても同様である。5次固有値においては、中路式の  $\frac{Z_2}{L} = 0.1$  以外は、いずれの場合も補剛桁のそれとほとんどかわらない。高次については、補剛桁の固有値と一致しアーチの効果がないことになる。また中路式の撓みの影響線については、本点の影響線で、水平拘束の効果は  $\frac{Z_2}{L} = 0.1$  の場合よりも  $\frac{Z_2}{L} = 0.25$  の場合に現われる。その本点の値は、無拘束時の撓みのそれぞれ約  $\frac{1}{3}$ 、約  $\frac{1}{5}$  となる。しかし、1/2点の影響線では水平拘束の効果は現われない。

- [注] (1) 吉村、平井：ランガ-橋の動的解析 ～土木学会論文集第101号 S39.1～  
 (2) 吉村、平井：補剛アーチ橋およびり橋の動的共通解析 ～土木学会論文集第115号 S403～  
 (3) 吉村、他：中路式補剛アーチ橋の固有値解析 ～土木学会西部支部講演概要集 S46頁～