I-198　曲げ荷重による構造物の弾塑性応答解析

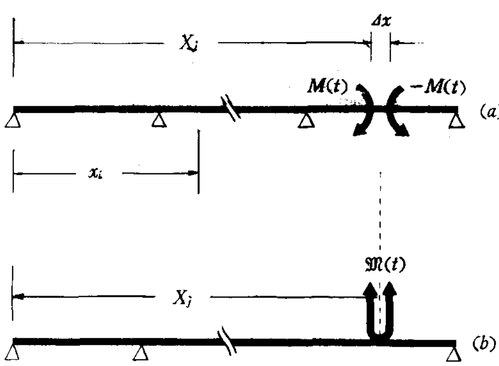
川崎重工　正員　○河野昭雄
熊本大学　正員　平井一男

まえがき

この研究は曲げ荷重と名づける新しい外力を使用して，塑性ヒンジを持つ構造物（与系）の弾塑性応答解析を行ったものである。この曲げ荷重はΔxという微小な距離に作用する等大逆方向のモーメント荷重である（図－1参照）。このような荷重をうける梁はそこで角度変化を生じ，これが塑性ヒンジの変形に対応することは物理的に理解できよう。この解析は，始めこの塑性ヒンジを無視した弾性体（以後簡単のために等価弾性体と呼ぶ）を考え，これに与系に作用する外力これと等価弾性体の塑性ヒンジに相当する位置に曲げ荷重を加える。この時等価弾性体の塑性ヒンジに相当する点の曲げモーメントと曲率との関係が，塑性ヒンジの曲げモーメントと曲率との関係と同じであれば，等価弾性体は与系と同じ弾塑性レスポンスを行うことになる。この解析では，このような条件を満足するように曲げ荷重の大きさをきめる。この解析手法は集中荷重と曲げ荷重とのレスポンスが求められれば静的な場合に対しても適用できる。ここでは，modal analysis を用いて説明する。

理論

一般に外力（集中荷重とモーメント荷重）が作用する時のレスポンスは，modal analysis を使用すると固有振動数 ω_n，正規化モード $\Phi_n(x)$，その１次微分 $\Phi_n'(x)$ が与えられておれば次式より求めることができる。



図－1

(i) 集中荷重$P(t)$がX_j点に作用する時

$$\ddot{q}_n + \omega_n^2 q_n = \Phi_n(X_j)\,P(t) \qquad (1)$$

$$w^P = \sum w_n^P(x_i,t) = \sum q_n^P\,\Phi_n(x_i) \qquad (2)$$

$$M^{BP} = \sum M_n^{BP}(x_i,t) = \sum q_n^P\,M_n^B(x_i) \qquad (3)$$

(ii) モーメント荷重$M(t)$がX_j点に作用する時

$$\ddot{q}_n^M + \omega_n^2 q_n^M = \Phi_n'(X_j)\,M(t) \qquad (4)$$

$$w^M = \sum w_n^M(x_i,t) = \sum q_n^M\,\Phi_n(x_i) \qquad (5)$$

$$M^{BM} = \sum M_n^{BM}(x_i,t) = \sum q_n^M\,M_n^B(x_i) \qquad (6)$$

ここに

w^P：$P(t)$によるレスポンス
M^{BP}：$P(t)$による曲げモーメントのレスポンス
w^M：$M(t)$によるたわみのレスポンス
M^{BM}：$M(t)$による曲げモーメントのレスポンス
M_n^B：$\Phi_n(x)$の変形に対応する曲げモーメント

$\rho(x)$を質量の分布関数とすると，$\Phi_n(x)$は次の正規化条件と直交条件とを満足する。

$$\int \rho(x)\,\Phi_n(x)\,\Phi_{\bar{n}}(x)\,dx \left.\begin{matrix} = 1 & \text{for} \quad n = \bar{n} \\ = 0 & \text{for} \quad n \neq \bar{n} \end{matrix}\right. \qquad (7)$$

いま図-1(a)に示すように等大逆方向のモーメント荷重をΔxの距離はなして作用させると，式(4)は次式によりあらわされる。

$$\ddot{q}_n^M + \omega_n^2 q_n^M = \{\Phi_n'(x_j) - \Phi_n'(x_j+\Delta x)\} M(t) \tag{8}$$

この式の右辺 R.H.S. は次のように書ける。

$$R.H.S. = -\left\{\frac{\Phi_n'(x_j+\Delta x) - \Phi_n'(x_j)}{\Delta x}\right\} M(t)\Delta x \tag{9}$$

このΔxを零に近づけると

$$R.H.S. = -\Phi_n''(x_j) M(t)\Delta x = -\Phi_n''(x_j)\mathfrak{M}(t) \tag{10}$$

この$\mathfrak{M}(t) \equiv M(t)\Delta x$が曲げ荷重である。今後この$\mathfrak{M}(t)$を図-1(b)の記号で示す。この時式(8)は

$$\ddot{q}_n^{\mathfrak{M}} + \omega_n^2 q_n^{\mathfrak{M}} = -\Phi_n''(x_j) = \frac{M_n^B(x_j)}{EI}\mathfrak{M}(t) \tag{11}$$

この$\mathfrak{M}(t)$によるたわみと曲げモーメントは次式より求められる。

$$w^{\mathfrak{M}} = \sum w_n^{\mathfrak{M}}(x_i, t) = \sum q_n^{\mathfrak{M}} \Phi_n(x_i) \tag{12}$$

$$M^{B\mathfrak{M}} = \sum M_n^B(x_i, t) = \sum q_n^{\mathfrak{M}} M_n^B(x_i) \tag{13}$$

いま$w_n^{\mathfrak{M}}$とM_n^{BP}とを使用してEq.(1)と(11)とを書きかえてみると

$$\frac{\partial^2 M_n^{BP}}{\partial t^2} + \omega_n^2 M_n^{BP} = M_n^B(x_i)\Phi_n(x_j)P(t) \tag{14}$$

$$\frac{\partial^2 w_n^{\mathfrak{M}}}{\partial t^2} + \omega_n^2 w_n^{\mathfrak{M}} = M_n^B(x_j)\Phi_n(x_i)\frac{\mathfrak{M}(t)}{EI} \tag{15}$$

となる。これより$w^{\mathfrak{M}}$はx_i点に$\mathfrak{M}(t)/EI$なる集中荷重を作用させ，x_j点の曲げモーメントを求めればよいことがわかる。

図-2に示す曲げモーメントM^Bと曲率ϕの関係がある時，幾何学的条件より

$$\Delta M^B = (M_p^B - M_y^B)(A^{-1} - 1) \tag{16}$$

または

$$\mathfrak{M} = \Delta M^B \Delta x = (M_p^B - M_y^B)\bar{A} \tag{17}$$

ここに $A = \dfrac{EI_p}{EI}$ ， $\bar{A} = (\bar{A}' - 1)\Delta x$

いくつかの塑性ヒンジに対してはマトリックスを用いて

$$\{\mathfrak{M}\} = E_A\{M_p^B\} - E_A\{M_y^B\} \tag{18}$$

$\{\ \}$は列ベクトルを示す。

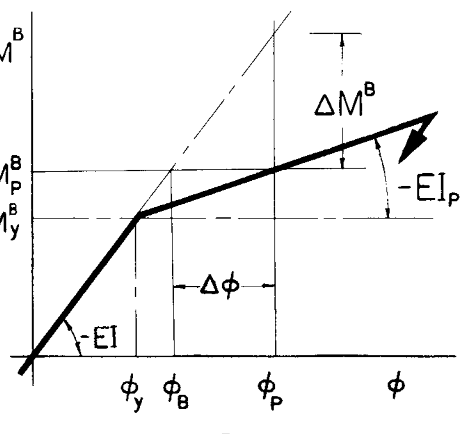


図-2

さて，Jコの集中荷重$\{P(t)\}$とKコの曲げ荷重$\{\mathfrak{M}(t)\}$に対して，Nコの集中質点を持つ構造物の運動方程式は

$$\{\ddot{q}\} + E\{q\} = \Phi_p^T\{P(t)\} + M_{\mathfrak{M}}^{BT} E_I\{\mathfrak{M}(t)\} \tag{19}$$

ここに

$$\{q\} = \begin{Bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ \vdots \\ q_N(t) \end{Bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & & \\ & \omega_2^2 & \\ & & \ddots \\ & & & \omega_N^2 \end{bmatrix}, \quad E_I = \begin{bmatrix} EI_1 & & \\ & EI_2 & \\ & & \ddots \\ & & & EI_K \end{bmatrix}$$

$$\Phi_P = \begin{bmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} & \cdots & \Phi_{N1} \\ \Phi_{12} & \Phi_{22} & \cdots & \Phi_{N2} \\ \vdots & & - - - & \\ \Phi_{1J} & \Phi_{2J} & \cdots & \Phi_{NJ} \end{bmatrix} = \left[\{\Phi_{1j}\}\ \{\Phi_{2j}\} \cdots \{\Phi_{Nj}\} \right], \qquad M^B_m = \begin{bmatrix} M^B_{11} & M^B_{21} & \cdots & M^B_{N1} \\ M^B_{12} & M^B_{22} & \cdots & M^B_{N2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ M^B_{1K} & M^B_{2K} & \cdots & M^B_{NK} \end{bmatrix} = \left[\{M^B_{1m}\}\ \{M^B_{2m}\} \cdots \{M^B_{Nm}\} \right]$$

この式を解いて$\{q\}$を求め，これよりたわみと曲げモーメントのレスポンス$\{w^{Pm}\}$と$\{M^{BPm}\}$とを次式より決定する。

$$\{w^{Pm}\} = \Phi\{q\} = \alpha^{wP}\{P(t)\} + \alpha^{wm}\{m(t)\}, \qquad \Phi : \textit{modal matrix} \tag{20}$$

$$\{M^{BPm}\} = M^B_m\{q\} = \alpha^{MP}\{P(t)\} + \alpha^{Mm}\{m(t)\} \tag{21}$$

この時$\{m(t)\}$の荷重点において塑性ヒンジの条件を満足させるために式(18)を用いる。この時式(18)中の$\{M^B_P\}$は式(21)の$\{M^{BPm}\}$に等しくなければならない。これより

$$\{m(t)\} = E_A(\alpha^{MP}\{P(t)\} + \alpha^{Mm}\{m(t)\}) - E_A\{M^B_y\} \tag{22}$$

書きかえて　$\{m(t)\} = C\,E_A\,\alpha^{MP}\{P(t)\} - C\,E_A\{M^B_y\}$，ここに $C = (I - E_A\alpha^{Mm})^{-1}$　(23)

この$\{m(t)\}$を式(19)に使用して

$$\{\ddot{q}\} + E\{q\} = (\Phi^T_P + M^{BT}_m E_I C E_A \alpha^{MP})\{P(t)\} - M^{BT}_m E_I C E_A\{M^B_y\} \tag{24}$$

これより求めた$\{q\}$を式(20)に使用するとレスポンスが求められる。

数値計算例

上述の理論を使用して図-3に示す単純梁の中央に一つの集中質量がある場合について数値計算を行ってみた。図-4に中央質点のレスポンスを示す。座標軸は無次元量で示す。

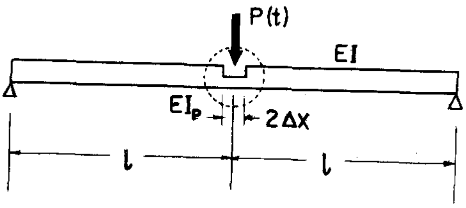


図-3

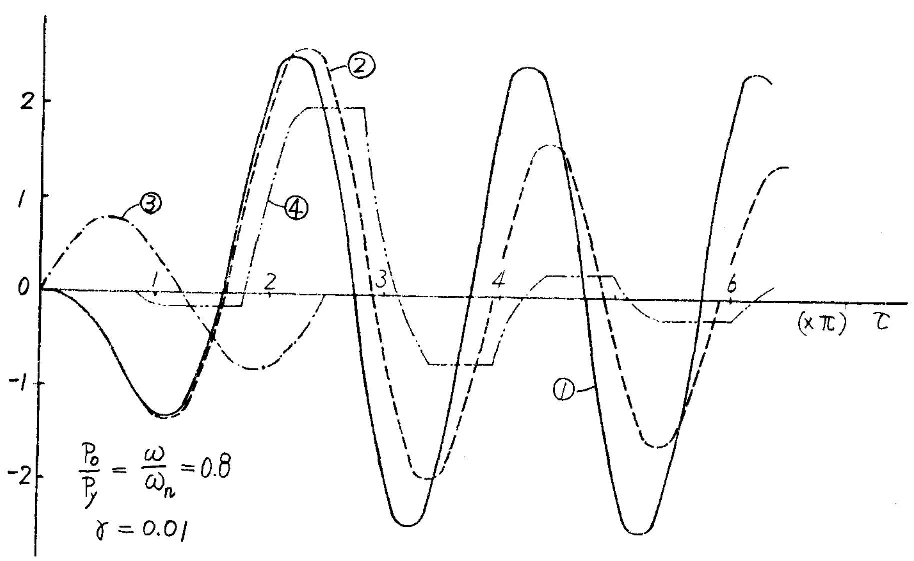


図-4