

弾性床に埋込まれたはりもしくは弾性床上のはりの静的解析を行う場合、Winklerの仮定がしばしば用いられる。著者はこの仮定に基づき、このようなはりもしくはこのようなはりを構成要素とする構造物をマトリックス構造解析法を用いて解く際に必要な弾性床の剛性マトリックスを導き、このマトリックスの利用には次のような利点のあることを確かめた。

1. はりの断面の変化、弾性床の変化を容易に評価できる。
2. はり要素の分割数を減らすことができる。

本文は弾性床に埋込まれたはりの動的解析を行う際に必要な弾性床の付加質量マトリックスおよび減衰マトリックスを弾性床の剛性マトリックスを導いた方法と同一の手法によって誘導しようとする試みたものである。

はり要素  $ij$  の節点における変位を  $\{q\}$ 、それに対応する節点力  $\{Q\}$  とするとき、

$$\text{はり要素の位置エネルギー} \quad U_b = \frac{1}{2} \{q\}^T [K_b] \{q\} \quad (1)$$

$$\text{弾性床の位置エネルギー} \quad U_s = \frac{1}{2} \{q\}^T [K_s] \{q\} \quad (2)$$

$$\text{はり要素の散逸関数} \quad R_b = \frac{1}{2} \{\dot{q}\}^T [D_b] \{\dot{q}\} \quad (3)$$

$$\text{弾性床の散逸関数} \quad R_s = \frac{1}{2} \{\dot{q}\}^T [D_s] \{\dot{q}\} \quad (4)$$

$$\text{はり要素の運動エネルギー} \quad T_b = \frac{1}{2} \{\dot{q}\}^T [M_b] \{\dot{q}\} \quad (5)$$

$$\text{弾性床の運動エネルギー} \quad T_s = \frac{1}{2} \{\dot{q}\}^T [M_s] \{\dot{q}\} \quad (6)$$

の形で表現し得るはり要素と弾性床の剛性マトリックス  $[K_b], [K_s]$ ; 減衰マトリックス  $[D_b], [D_s]$ ; 質量マトリックス  $[M_b], [M_s]$  を見出し得たならば、この要素の運動方程式は次のようになる。

$$[M_b + M_s] \{\ddot{q}\} + [D_b + D_s] \{\dot{q}\} + [K_b + K_s] \{q\} = \{Q\} \quad (7)$$

はり要素の変位  $\{u\}$  を次のように仮定する。

$$\{u\} = [A] \{\alpha\} \quad (8)$$

この式に節点の座標を代入すれば、節点変位  $\{q\}$  は次のようになる。

$$\{q\} = [B] \{\alpha\} \quad (9)$$

$[B]$  が正方行列であれば、式(8)と(9)から  $\{\alpha\}$  を消去してはり要素の変位  $\{u\}$  を得ることができ、それを時間微分すれば変位速度  $\{\dot{u}\}$  を得る。

$$\{u\} = [A][B]^{-1} \{q\} \quad (10)$$

$$\{\dot{u}\} = [A][B]^{-1} \{\dot{q}\} \quad (11)$$

また、これらの式から要素内のひずみ  $\{\varepsilon\}$  およびひずみ速度  $\{\dot{\varepsilon}\}$  は次のようになる。

$$\{\varepsilon\} = [W][B]^{-1} \{q\} \quad (12)$$

$$\{\dot{\varepsilon}\} = \{W\}\{B\}^{-1}\{\dot{q}\} \quad (13)$$

ここで、要素内の応力 $\{\sigma\}$ 、単位体積当りの運動量 $\{P\}$ とともに減衰応力 $\{Q_a\}$ を次のように仮定すれば、

$$\{\sigma\} = \{E\}\{\varepsilon\} \quad (14)$$

$$\{P\} = \{m\}\{\dot{u}\} \quad (15)$$

$$\{Q_a\} = \{d\}\{\dot{\varepsilon}\} \quad (16)$$

式(1)、(3)および(5)の $U_b$ 、 $R_b$ および $T_b$ は、はり要素内のエネルギーもしくは散逸関数の勘定から次のようになる。

$$U_b = \frac{1}{2} \int_V \{\dot{\varepsilon}\}^T \{E\} \{\dot{\varepsilon}\} dV \quad (17)$$

$$R_b = \frac{1}{2} \int_V \{\dot{\varepsilon}\}^T \{d\} \{\dot{\varepsilon}\} dV \quad (18)$$

$$T_b = \frac{1}{2} \int_V \{\dot{u}\}^T \{m\} \{\dot{u}\} dV \quad (19)$$

従って、はり要素の剛性マトリックス $\{K_b\}$ 、減衰マトリックス $\{D_b\}$ および質量マトリックス $\{M_b\}$ を次のように求めることができる。

$$\{K_b\} = \{([B]^{-1})^T\} \int_V \{A\}^T \{m\} \{A\} dV \{B\}^{-1} \quad (20)$$

$$\{D_b\} = \{([B]^{-1})^T\} \int_V \{W\}^T \{d\} \{W\} dV \{B\}^{-1} \quad (21)$$

$$\{M_b\} = \{([B]^{-1})^T\} \int_V \{W\}^T \{E\} \{W\} dV \{B\}^{-1} \quad (22)$$

ここで、減衰マトリックス $\{D_b\}$ は式(16)の仮定を用いたため、剛性マトリックス $\{K_b\}$ に比例した形を採用したことになる。

一方、このはり要素に接する弾性床の $U_s$ 、 $R_s$ および $T_s$ の計算は

1. 弾性床内の任意点のひずみ、ひずみ速度および変位速度を節点変位または節点変位速度で定義できない。

2. 弾性床内のエネルギーもしくは散逸関数の体積積分の範囲を定められない。

等の理由から、困難である。

そこで、「はりと弾性床とは常に密着している」という仮定を設け、弾性床の変位と変位速度をはり要素の変位 $\{u\}$ と変位速度 $\{\dot{u}\}$ で代表させる。また、弾性床の弾性特性と減衰特性をはり要素と弾性床の接触面で代表させる；換言すれば、この接触面で弾性床の弾性特性を単位面積当りのバネ定数 $\{(kg/cm)/(1/cm^2)\}$ で、減衰特性を単位面積当りのダンシュポット粘性係数 $\{(kg/(cm^2 \cdot sec))\}/(1/cm^2)\}$ で表わす。はり要素と弾性床との接触面積を $A$ で表わせば、 $U_s$ と $R_s$ は次のようになる。

$$U_s = \frac{1}{2} \int_A \{u\}^T \{E_s\} \{u\} dA \quad (23)$$

$$R_s = \frac{1}{2} \int_A \{\dot{u}\}^T \{d_s\} \{\dot{u}\} dA \quad (24)$$

従って、弾性床の剛性マトリックス $\{K_s\}$ と減衰マトリックス $\{D_s\}$ は次のようになる。

$$\{K_s\} = \{([B]^{-1})^T\} \int_A \{A\}^T \{E_s\} \{A\} dA \{B\}^{-1} \quad (25)$$

$$\{D_s\} = \{([B]^{-1})^T\} \int_A \{A\}^T \{d_s\} \{A\} dA \{B\}^{-1} \quad (26)$$

次に、弾性床の運動エネルギー  $T_s$  は弾性床の単位体積当りの質量を  $m_s [(\text{kg}/\text{cm}^3)/(\text{cm}/\text{sec}^2)]$ 、はり要素と弾性床の接触面の変位速度を  $\dot{u}$ 、実際の  $T_s$  に等しくなるように定める等価積分を VSE とすれば、

$$T_s = \frac{1}{2} \int_{\text{VSE}} \{\dot{u}\}^T [m_s] \{\dot{u}\} dV \quad (27)$$

となる。従って、弾性床の質量マトリックス  $[M_s]$  は次のようになる。

$$[M_s] = \int_{\text{VSE}} \{A\}^T [m_s] \{A\} dA [B]^{-1} \quad (28)$$

式(25)、(26)および(28)によれば、弾性床の剛性マトリックス  $[K_s]$ 、減衰マトリックス  $[D_s]$  および質量マトリックス  $[M_s]$  ははり要素の質量マトリックス  $[M_b]$  に比例した形をしている。

式(7)を用いて図-1に示した埋込みばりの突0に集中衝撃荷重を与えた場合のはりの挙動を Linear Acceleration Method により求めた。図-2は衝撃荷重  $1000\text{kg}$  が  $1/1000\text{sec}$  または  $1/2\text{sec}$  作用した場合の荷重作用突の変位、速度および加速度のグラフである。ただし、計算に用いたデータははりの長さ  $20\text{m}$ 、断面積  $113.1\text{cm}^2$ 、断面二次モーメント  $4637\text{cm}^4$ 、極二次モーメント  $9274\text{cm}^4$ 、ヤング率  $2.1 \times 10^6 \text{kg}/\text{cm}^2$ 、せん断弾性係数  $0.8 \times 10^6 \text{kg}/\text{cm}^2$ 、密度  $7.9 \text{g}/\text{cm}^3$ ；弾性床のはり要素に垂直方向のバネ定数  $1.0 (\text{kg}/\text{cm})/(\text{cm}^2)$ 、はり要素方向のバネ定数  $0.4 (\text{kg}/\text{cm})/(\text{cm}^2)$ 、はり要素回転方向のバネ定数  $0.2 (\text{kg}\cdot\text{cm})/(\text{cm}^2)$ 、密度  $2.5 \text{g}/\text{cm}^3$  とし、減衰係数は弾性係数の3%とした。

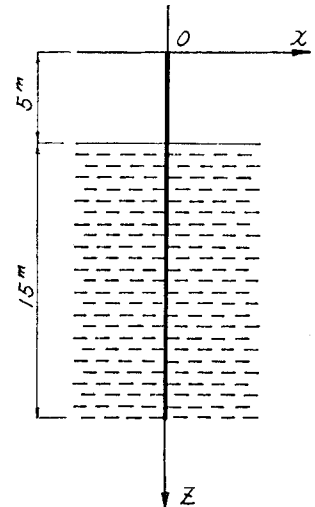


図-1

図-2(a)によれば、振動周期は  $0.27\text{sec}$  である。いまこの値を一端が完全に固定された片持ばりの振動周期と比較してみる。はりの長さが  $5\text{m}$  では周期は  $0.135\text{sec}$  であるが、 $7\text{m}$  で  $0.266\text{sec}$ 、 $9\text{m}$  で  $0.441\text{sec}$  である。

また、図-2(b)によれば、 $0.5\text{sec}$  付近における変位はこの埋込みばりを静的に解析した変位  $10.57\text{cm}$  と一致していることを示している。

弾性床の付加質量の増減は、このような載荷状態の場合には、変位にも周期にも大きな影響を与えないが、減衰係数を増加すると、変位は小さくなり、周期は長くなる。

### 参考文献

(1) 宮原 玄 「基礎の特性を考慮した構造物の静的解析」

昭和46年土木学会年次学術講演会 I-128

(2) John S. Archer, "Consistent Mass Matrix for Distributed Mass Systems," Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 89, No. ST4, August, 1963, pp 161~178.

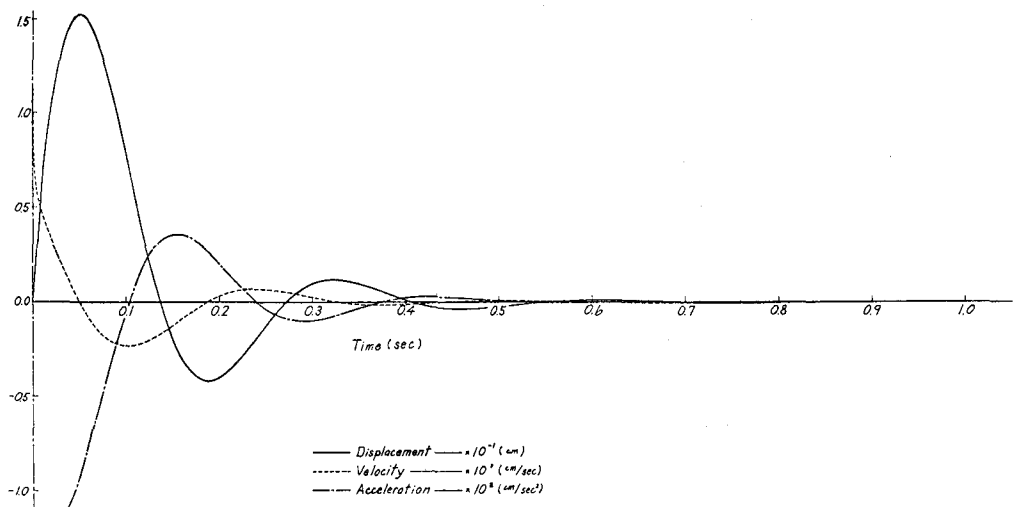
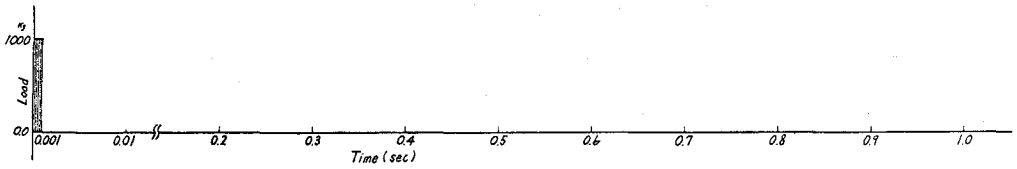


Fig-2(a)

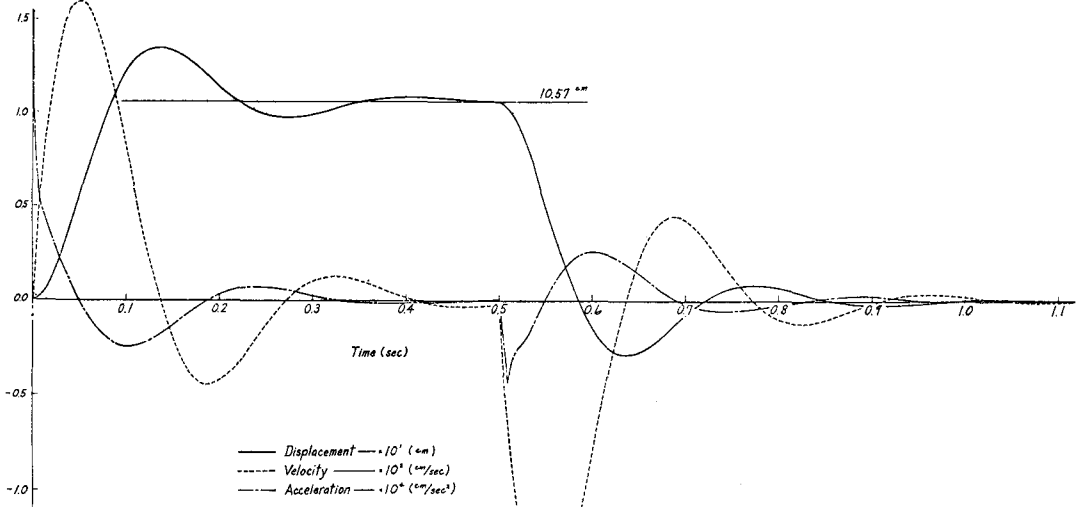
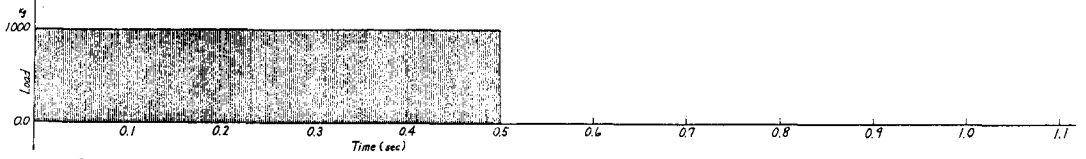


Fig-2(b)