I-194　“ティモシェンコ梁”としての薄肉曲線ばりの曲げねじれ振動波の理論

山梨大学工学部　正員　深沢泰晴

1. はじめに

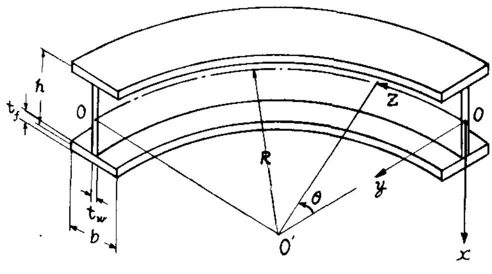
直線ばりのたわみ振動の解析において，せん断変形と回転慣性を考慮しない場合には，その解としての振動波のうちの短波長波は無限大の波速で伝播するという欠陥をもち，衝撃的撹乱に対する動的応答のようにTime delayが意味をもつような問題には満足な解は得られない。このように波動伝播の立場から解析を要する問題ならびにずんぐりしたはりの振動問題は，せん断変形と回転慣性をともに考慮したいわゆる“Timoshenko Beam”としての取り扱いが要求されることは周知のとおりである。

Aggarwal & Cranch[1]は断面の反り剛性が意味をもつIおよび[断面ばりのねじれ振動に対して，上記のTimoshenko Beam Theoryを拡張し，断面の反りに伴うせん断変形および回転慣性を考慮した解析を行ない，振動波長とPhase Velocityとの関係を求め，短波長の波動は曲げ振動の場合と同様に2つの波列が一定速度で伝播することを示した。

著者は一定曲率の薄肉ばりの曲げとねじれの連成振動を上述のようなTimoshenko Beamとして解析し，曲率を有するはりの曲げねじれ振動波の伝播特性を究明することを試みた。ここにはI型断面ばりの場合の解析結果の概略を述べる。

2. 振動方程式

図－1に示すような諸元をもつI断面の曲りばりが曲率面外への曲げとねじれの連成振動を行なうとき，系全体のポテンシャルエネルギーを計算する。



図－1　I断面曲りばりの一般図

まず，歪エネルギーV_1は全断面のy軸まわりの曲げに伴なうせん断歪分およびねじれによる断面の反り（フランジのx軸まわりの曲げ）に伴なうせん断歪分をも考慮すると

$$V_1=\frac{1}{2}\int_0^L\left\{EJ_y\left(\frac{\partial\psi_y}{\partial z}+\frac{\varphi}{R}\right)^2+\kappa_1GA\left(\frac{\partial u}{\partial z}-\psi_y\right)^2+GJ_T\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}-\frac{\psi_y}{R}\right)^2+2EJ_f\left(\frac{\partial\psi_x}{\partial z}\right)^2+2\kappa_2GA_f\left(\frac{h}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial z}-\psi_x\right)^2\right\}dz\cdots\cdots(1)$$

ここに，u＝中心軸のx軸方向へのたわみ；φ＝断面のねじれ回転角；ψ_y＝中立軸における断面の法線のy軸まわりの回転角；ψ_x＝フランジ断面の中立軸における法線のx軸まわりの回転角；A，J_y，J_T＝それぞれI断面の断面積，y軸まわりの断面2次モーメント，ねじり定数；A_f，J_f＝それぞれフランジ断面の断面積，x軸まわりの断面2次モーメント；κ_1＝I断面のx軸方向のせん断係数　；κ_2＝フランジ1枚のy軸方向のせん断係数；L＝はりの全長。

つぎに，系の全運動エネルギーV_2は

$$V_2=\frac{1}{2}\int_0^L\rho\left\{A\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2+J_y\left(\frac{\partial\psi_y}{\partial t}\right)^2+J_z\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2+2J_f\left(\frac{\partial\psi_x}{\partial t}\right)^2\right\}dz\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

ここに，ρ＝材料の単位体積当りの質量；J_z＝I断面の極2次モーメント。

結局，系の全ポテンシャルエネルギーVは　$V=V_1+V_2$　で与えられ，　$\delta V=0$　より変分問題のオイラーの微分方程式として，I断面曲りばりの曲げおよび反りに伴なうせん断変形と回転慣性を

考慮した曲率面外への曲げとねじれの連成振動の方程式がつぎのように得られる。

$$\begin{pmatrix} -\frac{\partial^2}{\partial z^2}+\frac{\rho}{G}\frac{\partial^2}{\partial t^2} & \kappa_1\frac{\partial}{\partial z} & 0 & 0 \\ \frac{\kappa_1\alpha_1}{h^2}\frac{\partial}{\partial z} & \frac{E}{G}\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\left(\frac{\kappa_1\alpha_1}{h^2}+\frac{\alpha_2}{R^2}\right)-\frac{\rho}{G}\frac{\partial^2}{\partial t^2} & \frac{1}{R}\left(\frac{E}{G}+\alpha_2\right)\frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & \frac{1}{R}\left(\frac{E}{G}\beta_1+\beta_3\right)\frac{\partial}{\partial z} & -\left(\beta_3+\frac{\kappa_2\beta_2}{2}\right)\frac{\partial^2}{\partial z^2}+\frac{E}{G}\frac{\beta_1}{R^2}+\frac{\rho}{G}\frac{\partial^2}{\partial t^2} & \frac{\kappa_2\beta_2}{h}\frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & \frac{\kappa_2\gamma}{2h}\frac{\partial}{\partial z} & \frac{E}{G}\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\frac{\kappa_2\gamma}{h^2}-\frac{\rho}{G}\frac{\partial^2}{\partial t^2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ \psi_y \\ \varphi \\ \psi_x \end{pmatrix}=0 \quad \cdots (3)$$

ここに，つぎのような断面定数に関する無次元パラメータが導入された；

$$\alpha_1 = Ah^2/J_y\ ,\quad \alpha_2 = J_T/J_y\ ,\quad \beta_1 = J_y/J_z\ ,\quad \beta_2 = A_f h^2/J_z\ ,\quad \gamma = A_f h^2/J_f$$

3. 曲げねじれ振動波の解析

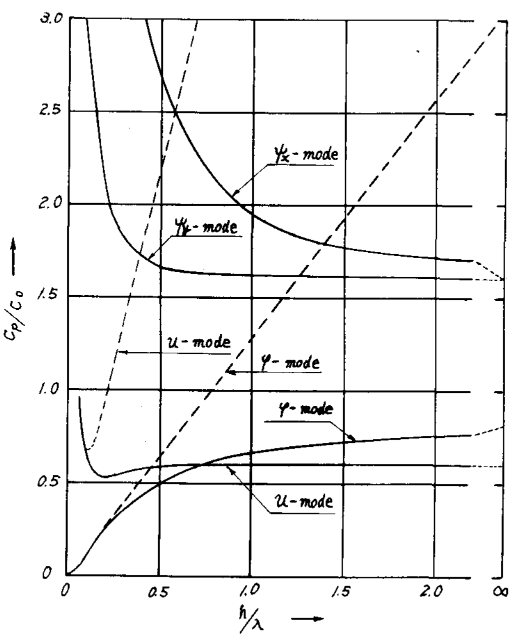
Phase Velocity c_p で伝播する正弦波を考える。すなわち波長を λ とすると

$$u = C_1 e^{\frac{2\pi i}{\lambda}(z-c_p t)},\quad \psi_y = C_2 e^{\frac{2\pi i}{\lambda}(z-c_p t)},\quad \varphi = C_3 e^{\frac{2\pi i}{\lambda}(z-c_p t)},\quad \psi_x = C_4 e^{\frac{2\pi i}{\lambda}(z-c_p t)} \cdots\cdots (4)$$

式(3)に式(4)を代入し，固有値問題として波速 c_p を定める振動数方程式を求めると

$$\begin{vmatrix} \left(\frac{c_p}{c_0}\right)^2-\kappa_1 & \kappa_1 & 0 & 0 \\ \frac{\kappa_1\alpha_1}{4\pi^2}\left(\frac{\lambda}{h}\right)^2 & \left(\frac{c_p}{c_0}\right)^2-\alpha_0-\frac{(\kappa_1\alpha_1+\alpha_2\mu^2)}{4\pi^2}\left(\frac{\lambda}{h}\right)^2 & \frac{(\alpha_0+\alpha_2)\mu}{4\pi^2}\left(\frac{\lambda}{h}\right)^2 & 0 \\ 0 & (\alpha_0\beta_1+\beta_3)\mu & \left(\frac{c_p}{c_0}\right)^2-\left(\frac{\kappa_2\beta_2}{2}+\beta_3\right)-\frac{\alpha_0\beta_1\mu^2}{4\pi^2}\left(\frac{\lambda}{h}\right)^2 & \frac{\kappa_2\beta_2}{2} \\ 0 & 0 & \frac{\kappa_2\gamma}{4\pi^2}\left(\frac{\lambda}{h}\right)^2 & \left(\frac{c_p}{c_0}\right)^2-\alpha_0-\frac{\kappa_2\gamma}{4\pi^2}\left(\frac{\lambda}{h}\right)^2 \end{vmatrix}=0 \quad \cdots (5)$$

ここに， $\alpha_0 = E/G$， $c_0=(G/\rho)^{1/2}$， $\mu = h/R$



図－2　I断面曲りばりにおける振動波の Phase Velocity

式(5)において，$\mu = h/R = 0$ とおくと直線ばりの方程式が得られる。すなわち曲げ振動に対して

$$\begin{vmatrix} \left(\frac{c_p}{c_0}\right)^2-\kappa_1 & \kappa_1 \\ \frac{\kappa_1\alpha_1}{4\pi^2}\left(\frac{\lambda}{h}\right)^2 & \left(\frac{c_p}{c_0}\right)^2-\frac{\alpha_0\kappa_1\alpha_1}{4\pi^2}\left(\frac{\lambda}{h}\right)^2 \end{vmatrix}=0 \quad \cdots (6)$$

ねじれ振動に対して

$$\begin{vmatrix} \left(\frac{c_p}{c_0}\right)^2-\left(\frac{\kappa_2\beta_2}{2}+\beta_3\right) & \frac{\kappa_2\beta_2}{2} \\ \frac{\kappa_2\gamma}{4\pi^2}\left(\frac{\lambda}{h}\right)^2 & \left(\frac{c_p}{c_0}\right)^2-\alpha_0-\frac{\kappa_2\gamma}{4\pi^2}\left(\frac{\lambda}{h}\right)^2 \end{vmatrix}=0 \quad \cdot (7)$$

式(6)は Timoshenko Beam の式と，式(7)は Aggarwal & Cranch の式[1)]とそれぞれ一致する。

計算結果の一例として，$b/h = 1/2$； $t_f/h = 1/25$； $t_w/h = 1/40$； $h/R = 1/5$ の場合の Phase Velocity c_p と Wave Number $1/\lambda$ との関係を図－2に実線で示す。図中の破線はせん断変形および回転慣性を無視した場合の値である。前者の場合には高周波振動の領域では4つの波列が振動数にはほとんど無関係に一定速度で伝播することがわかる。なおせん断係数は文献2)により $\kappa_1 = 0.373$，$\kappa_2 = 0.850$ とした。

参考文献 1) Aggarwal, H. R. and Cranch, E. T.　1967　Journal of Applied Mechanics, 337.
2) Cowper, G. R.　1966　Journal of Applied Mechanics, 335.