

広島大学工学部 正員 佐藤 誠
 “ 学生員 中松 新

1. まえおき

半無限弾性棒中を伝播する応力波解析は幾多の研究が積み重ねられているが、実際的な初期・境界条件に対する解は得られていない。これに対して昨今では数値解によるアプローチが多用されている。たとえは軸対称問題である円柱の縦衝撃については, Bertholf¹⁾, Habberstad²⁾, Altzman & Karal³⁾ が差分近似解で, また桜井と小島⁴⁾ が棒中の軸方向量だけの伝播について有限要素解で研究している。

ここでは縦衝撃を受ける有限長の長方形断面棒の波動を2次元問題として差分解析(F.D.)および有限要素解析(F.E.)を行なった結果を発表する。この場合2次元問題として入力波長, ポアソン比, 平面応力, 平面ひずみをパラメータとしてそれぞれの影響を比較しながら考察を行う。

2. 模型およびパラメータ

図-1に解析の対象とする模型寸法およびF.D.とF.E.のための分割例を示した。入力は $y=L$ に最大応力が 1kg/cm^2 となるよう周期 2τ のhalf sineを等分布として与えた。計算に用いた諸値を表-1に示す。

解析法	$\Delta x, \Delta y$	Δt	τ	2次元状態 平面応力 "ひずみ	ポアソン比 ν	弾性係数 E kg/cm^2	密度 ρ g/cm^3	表-1 (*) 要素180 節点124
F.D.	0.25 cm	0.5 μsec	25, 50 μsec	"ひずみ	0.1, 0.36	30,000	1.27	
F.E.	0.333(*) (二等辺三角形)	0.5	50	平面ひずみ	0.36	30,000	1.27	

それぞれの応力状態での ν の値に対する縦波の伝播速度を表-2に示す。

	$\nu=0.36$	$\nu=0.1$	表-2
平面応力	1,647 m/sec	1,545 m/sec	
平面ひずみ	1,993	1,554	$C_0=1,537$

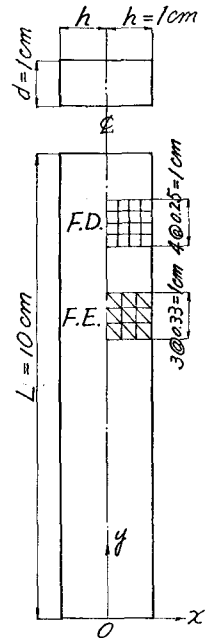


図-1 模型寸法および分割

3. 計算

差分解析に用いた支配方程式は次式である。

平面応力: $G \nabla^2 u + G \frac{\partial e}{1-2\nu} \frac{\partial e}{\partial x^2} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, $G \nabla^2 v + \frac{G}{1-2\nu} \frac{\partial e}{\partial y} = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$

平面ひずみ: $G \nabla^2 u + G \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{\partial e}{\partial x} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, $G \nabla^2 v + G \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{\partial e}{\partial y} = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$

ここに $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$, $e = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}$, $G = \text{せん断弾性係数}$

であり, u, v はそれぞれ x 方向, y 方向変位である。

有限要素解析に用いた支配方程式は

$$[M]\{\ddot{r}\} + [K]\{r\} = \{P\}$$

であり, $[M], [K]$ はそれぞれ質量マトリックス, 剛性マトリックスであり, $\{\ddot{r}\}, \{r\}, \{P\}$ はそれぞれ, 加速度ベクトル, 変位ベクトル, 外力ベクトルである。本研究では $[M]$ は分布質量とし, 逐次積分は $F_u^{5)}$ の提案した方法を用いた。また $[M]$ および $[K]$ には Cholesky の分解法⁶⁾を用いて連立方程式を解いた。次に単軸応力状態をもち1次元波動方程式

$C_0 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{\partial v}{\partial t^2}$ より解いた v_{max}, u_{max} の値を後の比較のために表-3に示す。 $v_{max} = \frac{\sigma_{max}}{G \nu / E}$, $u_{max} = \frac{-\nu}{E} \sigma_{max}$

ここに ω は入力 half sine の角速度である。 $\sigma_{max} = 1\text{kg/cm}^2$

$\tau \setminus \nu$	$\nu = 10^{-4}$	$-u = 10^{-5}$	表-3
25	0.1, 0.36	0.1, 0.36	単位 cm. (*)の値は平面ひずみと考慮したものの
	0.815	0.333 (0.367), 1.2 (1.36)	
50	1.632	0.333 (0.367), 1.2 (1.36)	

4. 計算結果おの考察

差分解析には表-1に示した分割長さを用いたが精度を確かめるために $\Delta x, \Delta t$ ともに $1/2$ にした場合のものと比較した。図-2には最も厳しい条件と考えられる場合について、衝撃端からの距離(l)が3cmの v を示した。両者はほぼ完全に一致しており表-1の値を用いても十分正確であると考えられる。また次頁の図-6には有限要素解との比較が示されているが与えた条件に対しては両者間には有為差はないとして差支えない。ただし有限要素解は補助記憶装置としてディスクを使用したため、計算時間は差分解析の約8倍(4300 sec)を要している。

図-3, 4, 5は $\tau = 25 \mu\text{sec}$ の場合に対するポアソン比おの応力状態の効果おの h/x についての v で示したものである。変化を比較し易いためにそれぞれおの h/x について基線を変えて示した。

$\nu = 0.36$ では $l = 1, 2 \text{ cm}$ で $h/x = 0.25$ おの 0.75 おの v おの振動位相が逆転している。これはKamalも指摘しており、その中おの中立的部分をnodal lineと呼んでいる。図-3おの(a)では h/x おの 0.5 おの 0.75 おの v がある。 l が増加すると次第に自由面に近付き、 $l = 3 \text{ cm}$

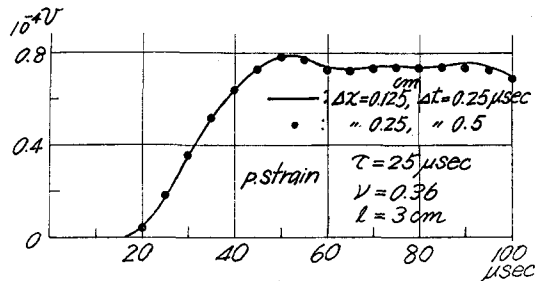


図-2 差分分割長さの影响 $h/x = 1.0$

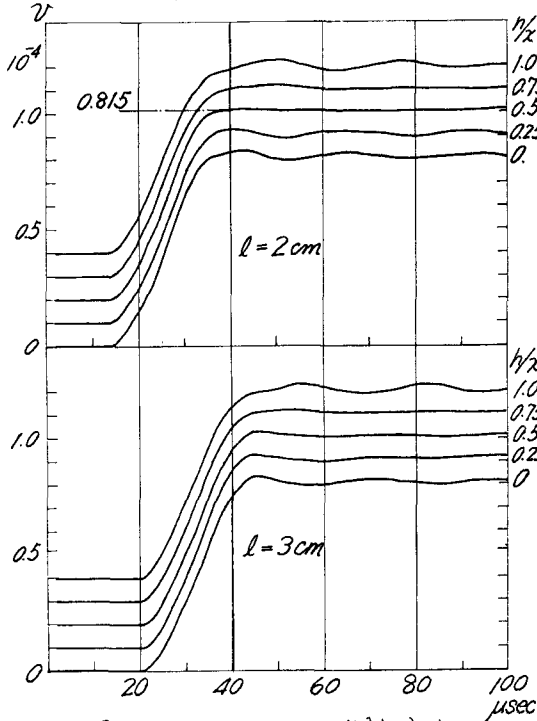


図-4 $l = 2, 3 \text{ cm}$ おの y 方向変位
 $\tau = 25 \mu\text{sec}$, $\nu = 0.1$ F.D.
plane strain

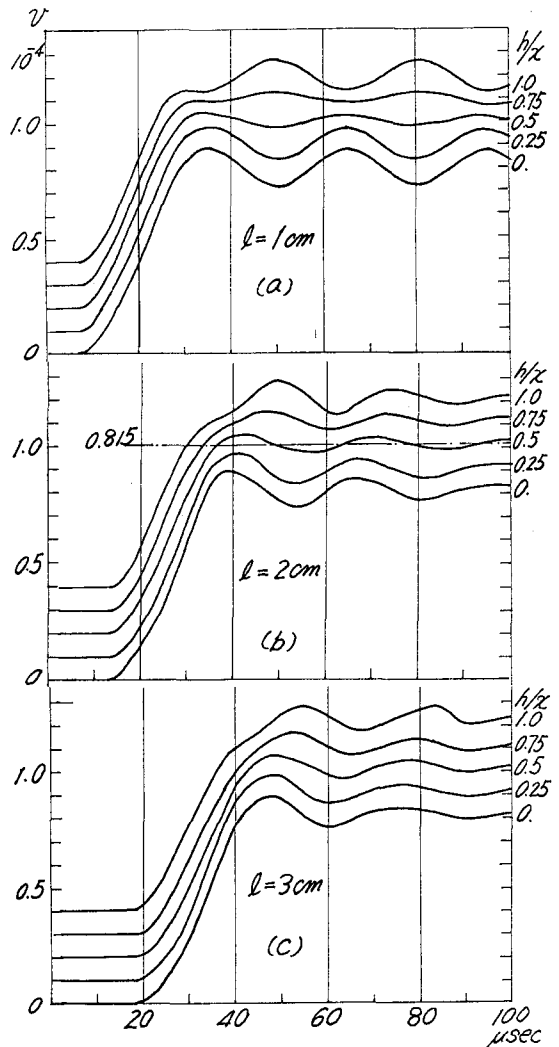


図-3 $l = 1, 2, 3 \text{ cm}$ おの y 方向変位 F.D.
 $\tau = 25 \mu\text{sec}$, $\nu = 0.36$, plane stress

では全体がほぼ同一位相となっている。 $\nu=0.1$ に対しては平面応力, 平面ひずみ共にほぼ等しい値であり, いずれも nodal line は明瞭にはなく $h/x=0.5$ 付近から両側に次第に均一化している。 ν の平均値 (図中一実鎖線) は平面応力では 1 軸値に等しいが平面ひずみでは図-5 に示すように約 9% 減少している。

図-6 は $\tau=50\mu\text{sec}$ の場合の ν を示したものである。 図-3, 5 と比較すると $\nu=0.36$ であるため ν の振動は極めて小さくあり, nodal line の存在が明瞭でない。 平面応力の場合には ν_{max} は 1 軸値に等しい。 以上より, 平均としての ν_{max} は ν が比較的大であれば平面応力が平面ひずみから定まり, ν には無関係であること。 本研究の範囲では平面応力の場合には 1 軸値に等しい。 nodal line はどの場合にも存在するか ν が大きく, 入力の立ち上りの激しい場合のみ衝撃波近傍において明瞭に現われることが明らかとなった。

図-7, 8 には各々のパラメータに対する u を示す。 こゝには示さなかったが u に対しては ν に存在した nodal line は現われず。 u_{max} は σ_{max} と同時刻に生ずるが平面応力, 平面ひずみ両者共に 1 軸値より大きく, 図-7 について表-3 の結果と比較すると, それぞれ $\tau=50\mu\text{sec}$ では $\nu=0.36$ に対して約 21%, 36%, $\tau=25\mu\text{sec}$ では $\nu=0.36$ に対して 42%, 43%, $\nu=0.1$ に対して 50%, 50% 増加している。 このことは u_{max} が平面応力では 1 軸値に一致しているのと対照的であり, 特に τ が小さいとき ν にかわりなくほぼ同じ値になることは Karal

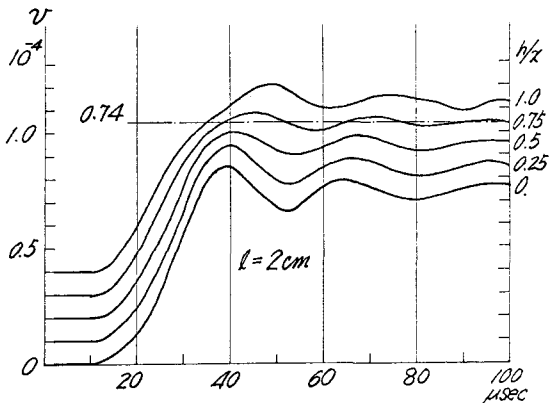


図-5 $l=2\text{cm}$ の y 方向変位 $\tau=25\mu\text{sec}, \nu=0.36, \text{plane strain}$ F.D.

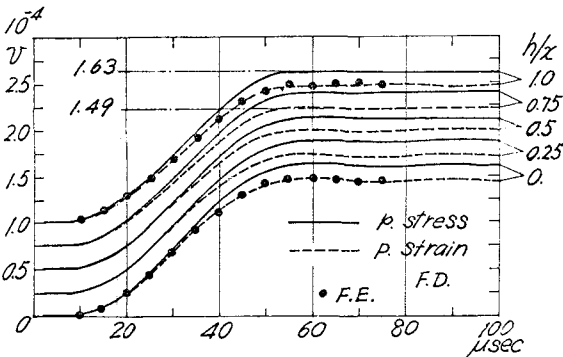


図-6 $l=1\text{cm}$ の y 方向変位 $\tau=50\mu\text{sec}, \nu=0.36$

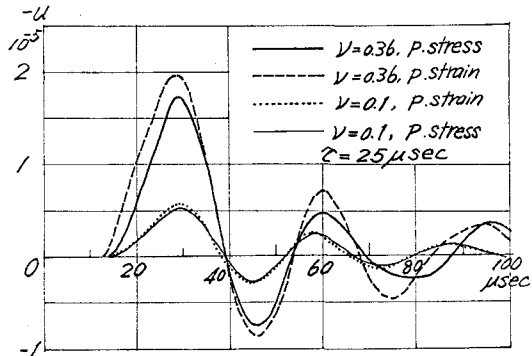


図-7 $l=2\text{cm}, h/x=1.0$ の x 方向変位

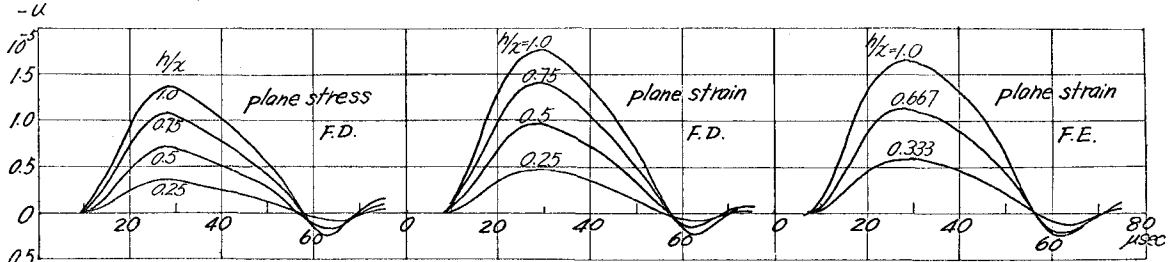


図-8 $l=1\text{cm}$ の x 方向変位 $\tau=50\mu\text{sec}, \nu=0.36$

の研究にも報告されてい
ない。このことについては現
段階では明らかでないが、
長方形断面棒の2次元伝
播機構に特有な激しいWar-
pingに直接関係してその原
因となっていると推定され
る。

図-9は棒軸上の応力 σ_y
がパラメータの違いにより
伝播距離の増加とともに変
形する様子を示したもので
ある。 $\tau = 50 \mu\text{sec}$ に対し
てはどの場合にも伝播距離
が増加しても比較的によく入
射波形を保存している。
 $\tau = 25 \mu\text{sec}$ に対しては ν
 $= 0.1$ の場合にはほとんど
変形しないうち伝播してい
るが、 $\nu = 0.36$ の場合には
伝播距離の増加と共に波形

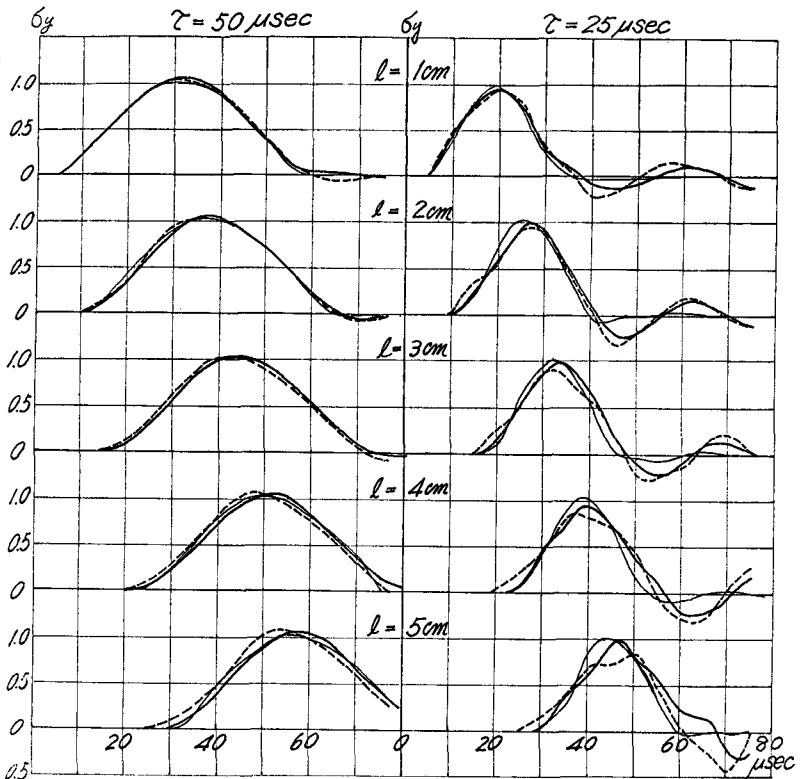


図-9 $l = 1, 2, 3, 4, 5 \text{ cm}$ の $h/x = 0$ での σ_y . 単位 Kg/cm^2
 — $\nu = 0.36$, p.stress. F.D. — $\nu = 0.36$, p.stress. F.D.
 - - - $\nu = 0.36$, p.strain. F.E. - - - $\nu = 0.36$, p.strain. F.D.
 — $\nu = 0.1$, " F.D. — $\nu = 0.1$, p.stress. F.D.

が散れる。特に平面ひずみの場合には変形が著しい。 $\tau = 50 \mu\text{sec}$ では入力波長は約70hであるが $\tau = 25 \mu\text{sec}$ のときは波長は5h以下となり、棒の横方向の長さに対して十分長いとはいえず、上述のWarpingの結果と考えられる。尚、差分解析の性質上応力は変位より精度が要くなることも考慮する必要があり、その場合には図-2で示した密な分割を用いる必要がある。

以上では反射応力波のことは触れなかったが半無限棒としての考察しか行っていないが、有限長の棒としての考察は講演当日発表する。

参考文献

- 1) Berzholf, L.D., "Numerical Solution for Two-Dimensional Elastic Wave Propagation in Finite Bars," J. Appl. Mech. 34(5), 725-734 (1967)
- 2) Haberstad, J.L., "A Two-Dimensional Numerical Solution for Elastic Waves in Variably Configured Rods," J. Appl. Mech. 38(1), 62-70 (1971)
- 4) 榎井春輔, 小島省三, "有限要素法の弾力伝播への適用について," 日本鋼構造協会第5回大会論文集, 330-337 (1971)
- 3) Alterman, Z. & Kana, Jr., F.C., "Propagation of Elastic Waves in a Semi-Infinite Cylindrical Rod Using Finite Difference Method," J. Sound Vib. 13(2), 115-145 (1970)
- 5) Fu, C.C., "A Method for the Numerical Integration of the Equations of Motion Arising From a Finite Element Analysis," J. Appl. Mech. 37(6), 599-605 (1970)
- 6) 上田正, W.ウーバー著, 山本善之訳, "構造物解析のプログラム," 共立出版, 55-70 (1970)