I-183 二相混合体中における加速度波の性質

京都大学防災研究所 正 員 土岐憲三
京都大学 大学院 学生員 ○佐藤忠信

1．まえがき． 物体中を伝播する非線形波動を研究するための手法としては，(i)物体中を伝播する二次以上の特異面を研究する方法，(ii)有限変形を受けた物体中の重ね合された微小平面波を研究する方法，(iii) Sock あるいは Simple wave を研究する方法，などが考えられる。筆者らは，これまで地盤構成土を二相混合体と考え，このような物体中を伝播する Simple wave についての研究を行なってきた。[1,2] Simple wave は任意の一組の特性曲線上の Riemann 不変量が一定値になるようなものであり，時間と空間の全領域において滑らかなものであるが，非線形性を有する方程式では時間と空間の全領域において滑らかな解が得られることはまれである。したがって二相混合体中を伝播する不連続面の性質を調べる必要がある。ここでは二相混合体中を伝わる二次の不連続面についての三次元的な挙動を解析的に表示し，このような不連続面の伝播速度ならびに振幅の消長について考察する。この波動は，変形の時間あるいは空間変数についての一次微分はすべての領域において連続であるが，波面を横切る方向の二次微分は jump をもつようなものであることから加速度波と言われる。

2．加速度波の振幅に関する一般的な性質． 波面を横切るときの jump の大きさ $a_k^{(\alpha)}$ を支配する方程式は若干の演算の後，次式のように求まる。[3]

$$2U_{(\alpha)}^2\dot{\overline{a_k^{(\alpha)}}}+3U_{(\alpha)}\dot{\overline{U_{(\alpha)}}}a_k^{(\alpha)}=[\dddot{x}_k^{(\alpha)}]_\alpha-U_{(\alpha)}^2N_I^{(\alpha)}N_L^{(\alpha)}[\dot{F}_{kL,I}^{(\alpha)}]_\alpha \tag{1}$$

ここに，$U_{(\alpha)}$：α相を伝わる加速度波の伝播速度，$a_k^{(\alpha)}$：α相を伝わる加速度波の振幅の k 成分，$N_I^{(\alpha)}$：α相の時刻 t における波面の基準座標系での方向余弦，$X_I^{(\alpha)}$：α相の基準座標系における粒子位置，$(\dot{\ })$：$\partial(\ )/\partial t$，$\dot{\overline{(\ )}}$：$d(\ )/dt$，$F_{kL}^{(\alpha)}$：$\partial x_k^{(\alpha)}/\partial X_L^{(\alpha)}$，$F_{kL,J}^{(\alpha)}$：$\partial^2x_k^{(\alpha)}/\partial X_L^{(\alpha)}\partial X_J^{(\alpha)}$，$[\psi^{(\alpha)}]_\alpha=\psi_-^{(\alpha)}-\psi_+^{(\alpha)}$：α相の波面での $\psi^{(\alpha)}$ の jump を表わす。$\psi_+^{(\alpha)}$：波前面での $\psi^{(\alpha)}$ の値，$\psi_-^{(\alpha)}$：波後面での $\psi^{(\alpha)}$ の値。なお $U_{(\alpha)}$ と $a_k^{(\alpha)}$ と各変量の jump の間には次式が成立する。[4]

$$[\ddot{x}_k^{(\alpha)}]_\alpha=U_{(\alpha)}^2a_k^{(\alpha)}\quad,\quad[\dot{F}_{kL}]_\alpha=-U_{(\alpha)}a_k^{(\alpha)}N_L^{(\alpha)}\quad,\quad[F_{kL,J}^{(\alpha)}]_\alpha=a_k^{(\alpha)}N_L^{(\alpha)}N_J^{(\alpha)} \tag{2}$$

3．運動量の釣合式，エネルギーの釣合式，構成関係．[5,6]

(a) 運動量の釣合式．

$$\pi_i=\rho_2(g_i-G_i)-\sigma_{ki,k}^{(2)}+\frac{1}{2}m_1u_i^{(1)}+\frac{1}{2}m_2u_i^{(2)}\quad,\quad-\pi_i=\rho_1(f_i-F_i)-\sigma_{ki,k}^{(1)}+\frac{1}{2}m_1u_i^{(1)}+\frac{1}{2}m_2u_i^{(2)} \tag{3}$$

ここに，π_i：相相互の間でやりとりされる力，ρ_1F_i：(1) 相の物体力，ρ_2G_i：(2) 相の物体力，$\sigma_{ki}^{(\alpha)}$：(α) 相の応力テンソル成分，ρ_α：(α) 相の密度，m_1, m_2：(1), (2)相の質量の増減を表わす量，$(\ )_{,k}^{(\alpha)}=\partial(\ )^{(\alpha)}/\partial x_k^{(\alpha)}$，$(\ )_{;K}^{(\alpha)}=\partial(\ )^{(\alpha)}/\partial X_K^{(\alpha)}$，なお $u_i^{(1)}, u_i^{(2)}, f_i, g_i$ の間には次式の関係がある。

$$\left.\begin{aligned}u_i^{(1)}&=D^{(1)}x_i^{(1)}/Dt\ ,\quad f_i=D^{(1)}u_i^{(1)}/Dt\ ,\quad D^{(1)}/Dt=\partial/\partial t+u_m^{(1)}\partial/\partial x_m^{(1)}\\u_i^{(2)}&=D^{(2)}x_i^{(2)}/Dt\ ,\quad g_i=D^{(2)}u_i^{(2)}/Dt\ ,\quad D^{(2)}/Dt=\partial/\partial t+u_m^{(2)}\partial/\partial x_m^{(2)}\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

また，ρ_α と m_α の間には次式のような関係式が成立する。

$$\left.\begin{aligned}m_1&=D^{(1)}\rho_1/Dt+\rho_1u_{k,k}^{(1)}=\partial\rho_1/\partial t+\partial(\rho_1u_k^{(1)})/\partial x_k^{(1)}\\m_2&=D^{(2)}\rho_2/Dt+\rho_2u_{k,k}^{(2)}=\partial\rho_2/\partial t+\partial(\rho_2u_k^{(2)})/\partial x_k^{(2)}\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

(b) エネルギーの釣合式.

$$\rho r - g_{k,k} + \rho D\varepsilon/Dt + \pi_i(u_i^{(1)} - u_i^{(2)}) + \frac{1}{4}(\sigma_{ki}^{(1)} + \sigma_{ik}^{(1)})(u_{i,k}^{(1)} + u_{k,i}^{(1)}) + \frac{1}{4}(\sigma_{ki}^{(2)} + \sigma_{ik}^{(2)})(u_{i,k}^{(2)} + u_{k,i}^{(2)})$$
$$+ \frac{1}{4}(\sigma_{ki}^{(1)} - \sigma_{ik}^{(1)})(u_{i,k}^{(1)} - u_{k,i}^{(1)} - u_{i,k}^{(2)} + u_{k,i}^{(2)}) = 0 \tag{6}$$

ここに，$\rho D\ /Dt = \rho_1 D^{(1)}/Dt + \rho_2 D^{(2)}/Dt$ ，$\rho = \rho_1 + \rho_2$ ，r ：二相混合体単位質量当りの発生熱量，g_k：二相混合体の熱束ベクトル，ε ：二相混合体単位質量当りの内部エネルギー。

(c) **構成関係.** 混合体の場合，構成関係は変形勾配 $\underset{\sim}{F}^{(\alpha)}$ ，速度勾配 $\dot{\underset{\sim}{F}}^{(\alpha)}$ ，相対速度 $\underset{\sim}{U}$ ，混合体の平均的な温度 T などの汎関数となるが，後にも述べるように速度勾配が構成関係に入ると加速度波が存在しなくなる場合があるので，ここではつぎのような構成関係が成立するときを考える。

$$\varepsilon = \varepsilon(T, \underset{\sim}{F}^{(\alpha)}) \ , \quad \underset{\sim}{P}^{(\alpha)} = \underset{\sim}{P}^{(\alpha)}(T, \underset{\sim}{F}^{(\alpha)}, \underset{\sim}{U}) \ , \quad \underset{\sim}{\Pi} = \underset{\sim}{\Pi}(T, \underset{\sim}{F}^{(\alpha)}, \underset{\sim}{U}) \ , \quad g = g(T, \underset{\sim}{F}^{(\alpha)}, \underset{\sim}{U}, \underset{\sim}{g}) \tag{7}$$

ここに，$\underset{\sim}{P}^{(\alpha)}$ は (α) 相の Piola－Kirchhoff の応力テンソルであり，$g = \mathrm{grad}\ T$ で温度勾配を表わしている。なお，ρ_α° を α 相の基準座標系での密度とすれば，$\underset{\sim}{\sigma}^{(\alpha)}$ と $\underset{\sim}{P}^{(\alpha)}$ との間には次式が成立する。

$$\sigma_{ki}^{(\alpha)} = (\rho_\alpha/\rho_\alpha^\circ)\, x_{i,M}^{(\alpha)}\, P_{kM}^{(\alpha)} = (\rho_\alpha/\rho_\alpha^\circ)\, F_{iM}^{(\alpha)}\, P_{kM}^{(\alpha)} \tag{8}$$

4. 加速度波の伝播速度. 加速度波を考えているから次式の成立することは明らかである。

$$[\dot{x}_k^{(\alpha)}]_\alpha = 0 \ , \quad [F_{iJ}^{(\alpha)}]_\alpha = 0 \ , \quad [\pi_i]_\alpha = 0 \ , \quad [\rho_\alpha] = 0 \tag{9}$$

なお，物体力の jump ならびに質量の増減を表わす量に対してつぎのような仮定を設ける。

（仮定 1）： $[G_i]_\alpha = 0$ ，$[F_i]_\alpha = 0$ ，$m_1 = m_2 = 0$ (10)

式 (8)，$(9)_{3,4}$，(10) を考慮して式 (3) の両辺の波面での jump を取ると次式をうる。

$$\rho_1^\circ[\ddot{x}_i^{(1)}]_1 - [P_{Ji,J}^{(1)}]_1 = 0 \ , \quad \rho_2^\circ[\ddot{x}_i^{(2)}]_2 - [P_{Ji,J}^{(2)}]_2 = 0 \tag{11}$$

式 $(7)_2$ より，

$$[P_{Ji,J}^{(\alpha)}]_\alpha = (\partial P_{Ji}^{(\alpha)}/\partial F_{\ell M}^{(\alpha)})[F_{\ell M,J}^{(\alpha)}]_\alpha + (\partial P_{Ji}^{(\alpha)}/\partial U_\ell)[U_{\ell,J}]_\alpha + (\partial P_{Ji}^{(\alpha)}/\partial T)[T_{,J}]_\alpha \tag{12}$$

であるから，式 (12) を式 (11) に代入し式 (2) の関係を考慮すれば次式をうる。

$$\{U_{(1)}^2\delta_{i\ell} + C_{i\ell}^{(1)}U_{(1)} - Q_{i\ell}^{(1)}\}a_\ell^{(1)} + (\partial P_{Ji}^{(1)}/\partial T)[T_{,J}]_\alpha = 0 \ , \quad \{U_{(2)}^2\delta_{i\ell} - C_{i\ell}^{(2)}U_{(2)} - Q_{i\ell}^{(2)}\}a_\ell^{(2)} + (\partial P_{Ji}^{(2)}/\partial T)[T_{,J}]_2 = 0 \tag{13}$$

ここに，

$$Q_{i\ell}^{(\alpha)} = \frac{1}{\rho_\alpha^\circ}(\partial P_{iK}^{(\alpha)}/\partial F_{\ell M}^{(\alpha)})N_M^{(\alpha)}N_K^{(\alpha)} \ , \quad C_{i\ell}^{(\alpha)} = \frac{1}{\rho_\alpha^\circ}(\partial P_{Ki}/\partial U_\ell)N_K^{(\alpha)} . \tag{14}$$

いま加速度波が伝播する物体が homothermal な状態にあるとすれば次式が成立する。

（仮定 2）： $[\partial T/\partial X_J^{(\alpha)}]_\alpha = [\dot{T}]_\alpha = 0$ (15)

式 (15) を式 (13) に代入すれば，式 (7) で表わされるような構成関係をもつ物体中を伝播する加速度波の伝播速度を決定する特性方程式として次式をうる。

$$\det|U_{(1)}^2 + C_{i\ell}^{(1)}U_{(1)} - Q_{i\ell}^{(1)}| = 0 \ , \quad \det|U_{(2)}^2 - C_{i\ell}^{(2)}U_{(2)} - Q_{i\ell}^{(2)}| = 0 \tag{16}$$

式 (16) の 2 式は独立に成立し，かつ $U_{(\alpha)}$ に関して各々 6 次の方程式になっている。このことから，加速度波は各相を独立に伝播できかつ各相に 6 個，合計 12 個の異る伝播速度が存在できることになる。

5. 構成関係に速度勾配が入る物体中の加速度波の有無

式 $(7)_{2,3}$ のかわりに，

$$\underset{\sim}{P}^{(\alpha)} = \underset{\sim}{P}^{(\alpha)}(T, \underset{\sim}{F}^{(\alpha)}, \dot{\underset{\sim}{F}}^{(\alpha)}, \underset{\sim}{U}) \ , \quad \underset{\sim}{\Pi} = \underset{\sim}{\Pi}(T, F^{(\alpha)}, \dot{F}^{(\alpha)}, \underset{\sim}{U}) \tag{17}$$

とし，4. での解析を行なえばよいわけであるが，構成関係に $\dot{\underset{\sim}{F}}^{(\alpha)}$ が入るので $\underset{\sim}{P}^{(\alpha)}$，$\underset{\sim}{\Pi}$ に不連続性が発生し簡単ではない。いま $\underset{\sim}{P}^{(\alpha)}$，$\underset{\sim}{\Pi}$ が $\dot{\underset{\sim}{F}}^{(\alpha)} = 0$ のまわりで展開可能であると考え

$$P_{Ki}^{(\alpha)} = A_{Ki}^{(\alpha)} + B_{Ki\ell M}^{(\alpha)}\dot{F}_{\ell M}^{(1)} + C_{Ki\ell M}^{(\alpha)}\dot{F}_{\ell M}^{(2)} \ , \quad \pi_i = A_i + B_{i\ell M}\dot{F}_{\ell M}^{(1)} + C_{i\ell M}\dot{F}_{\ell M}^{(2)} \tag{18}$$

なる構成関係を考える。ここに展開項の係数 $A_{Ki}^{(\alpha)}$，$B_{Ki\ell M}^{(\alpha)}$，$\cdots\cdots$ などは T，$\underset{\sim}{F}^{(\alpha)}$，$\underset{\sim}{U}$ の汎関数である。式 $(18)_1$ の両辺の jump を取れば次式をうる。

$$[P_{Ki}^{(\alpha)}]_1 = B_{Ki\ell M}^{(\alpha)}[\dot{F}_{\ell M}^{(1)}]_1 \quad , \quad [P_{Ki}^{(\alpha)}]_2 = C_{Ki\ell M}^{(\alpha)}[\dot{F}_{\ell M}^{(2)}]_2 \tag{19}$$

ただし，(1), (2) 相を伝わる加速度波が重なることはないと考える。すなわち $[\dot{F}_{\ell M}^{(1)}]_2 = [\dot{F}_{\ell M}^{(2)}]_1 = 0$.
一方，式 (3) の両式を和し式 $(10)_{3,4}$ を考慮し Kotchine の定理[4] を用いると次式が成立する。

$$[P_{Ki}^{(1)} + P_{Ki}^{(2)}]_\alpha N_K^{(\alpha)} = 0 \tag{20}$$

式 (20) に式 (19) を代入し，式 $(2)_2$ の関係を用いれば次式をうる。

$$(B_{Ki\ell M}^{(1)} + B_{Ki\ell M}^{(2)})N_K^{(1)}N_M^{(1)}U_{(1)}a_\ell^{(1)} = 0 \quad , \quad (C_{Ki\ell M}^{(1)} + C_{Ki\ell M}^{(2)})N_K^{(2)}N_M^{(2)}U_{(2)}a_\ell^{(2)} = 0 \tag{21}$$

式 (21) において $a_\ell^{(\alpha)}$ が解をもつ場合ともたない場合に分けて考えるとつぎのようなことになる。

(a) $\det|(B_{Ki\ell M}^{(1)} + B_{Ki\ell M}^{(2)})N_K^{(1)}N_M^{(1)}| = 0$, $\det|(C_{Ki\ell M}^{(1)} + C_{Ki\ell M}^{(2)})N_K^{(2)}N_M^{(2)}| = 0$ ： この場合は $a_\ell^{(1)} \neq 0$ $a_\ell^{(2)} \neq 0$ なる解が有り，構成関係に速度勾配が入っても加速度波が存在しうることを示している。

(b) $\det|(B_{Ki\ell M}^{(1)} + B_{Ki\ell M}^{(2)})N_K^{(1)}N_M^{(1)}| \neq 0$, $\det|(C_{Ki\ell M}^{(1)} + C_{Ki\ell M}^{(2)})N_K^{(2)}N_M^{(2)}| \neq 0$ ： この場合は $a_\ell^{(1)} = 0$ $a_\ell^{(2)} = 0$ となり，構成関係に速度勾配が入ると加速度波が存在しなくなることを表わしている。

(a) のような条件が構成関係に加えられると，Navier-Stokes 流体ではエントロピー不等式より求まる構成関係の制限条件[7] を満さなくなる。一般の物体においてもエントロピー不等式より求まる制限条件のほかに (a) のような条件が成立する物体は非常に特種なものと考えられるから，一般的には (b) の条件が成立し，構成関係に速度勾配が入る物体中では加速度波は存在できないと考えられる。したがって以下では構成関係に速度勾配が入らない物体を考えることにする。

6. 加速度波の振幅の消長. 式 (3) の両辺を t で偏微分し両辺の jump を取ると次式をうる。

$$[\dot{J}^{(2)}]_2\pi_i + J^{(2)}[\dot{\pi}_i]_2 = \rho_2^\circ[\ddot{x}_i^{(2)}]_2 - [\dot{P}_{Ki,K}^{(2)}]_2 \quad , \quad -[J^{(1)}]_1\pi_i - J^{(1)}[\dot{\pi}_i]_1 = \rho_1^\circ[\ddot{x}_i^{(1)}]_1 - [\dot{P}_{Ki,K}^{(1)}]_1 \tag{22}$$

式 (22) の両辺にある jump を式 (7) の関係を用いて計算し，式 (2) の関係を用い次式をうる。

$$\begin{aligned}
[\dddot{x}_i^{(1)}]_1 &= M_{i\ell}^{(1)}a_\ell^{(1)} + \lambda_{i\ell m}^{(1)}a_\ell^{(1)}a_m^{(1)} + \frac{1}{\rho_1^\circ}(\partial P_{Ki}^{(1)}/\partial F_{\ell M}^{(1)})[\dot{F}_{\ell M,K}^{(1)}]_1 + \frac{1}{\rho_1^\circ}(\partial P_{Ki}^{(1)}/\partial U_\ell)[\ddot{F}_{\ell K}^{(1)}]_1 + \frac{1}{\rho_1^\circ}(\partial P_{Ki}^{(1)}/\partial T)[\partial^2 T/\partial X_K^{(1)}\partial t]_1 \\
[\dddot{x}_i^{(2)}]_2 &= M_{i\ell}^{(2)}a_\ell^{(2)} + \lambda_{i\ell m}a_\ell^{(2)}a_m^{(2)} + \frac{1}{\rho_2^\circ}(\partial P_{Ki}^{(2)}/\partial F_{\ell M}^{(2)})[\dot{F}_{\ell M,K}^{(2)}]_2 + \frac{1}{\rho_2^\circ}(\partial P_{Ki}^{(2)}/\partial U_\ell)[\ddot{F}_{\ell K}^{(2)}]_2 + \frac{1}{\rho_2^\circ}(\partial P_{Ki}^{(2)}/\partial T)[\partial^2 T/\partial X_K^{(2)}\partial t]_2
\end{aligned} \tag{23}$$

ここに，

$$\begin{aligned}
\rho_\alpha^\circ M_{i\ell}^{(\alpha)} = &- \frac{\partial^2 P_{Ki}^{(\alpha)}}{\partial F_{\ell M}^{(\alpha)}\partial T}\frac{\partial T}{\partial X_K^{(\alpha)}}U_{(\alpha)}N_M^{(\alpha)} \pm \frac{\partial^2 P_{Ki}^{(\alpha)}}{\partial U_\ell\partial T}\frac{\partial T}{\partial X_K^{(\alpha)}}U_{(\alpha)}^2 + \frac{\partial^2 P_{Ki}^{(\alpha)}}{\partial T\partial F_{\ell M}^{(\alpha)}}\frac{\partial T}{\partial t}N_M^{(\alpha)}N_K^{(\alpha)} + \frac{\partial^2 P_{Ki}^{(\alpha)}}{\partial F_{iJ}^{(\beta)}\partial F_{\ell M}^{(\alpha)}}\dot{F}_{iJ}^{(\beta)}N_M^{(\alpha)}N_K^{(\alpha)} \\
&\mp \frac{\partial^2 P_{Ki}^{(\alpha)}}{\partial T\partial U_\ell}\frac{\partial T}{\partial t}U_{(\alpha)}N_K^{(\alpha)} \mp \frac{\partial^2 P_{Ki}^{(\alpha)}}{\partial F_{mM}^{(\beta)}\partial U_\ell}\dot{F}_{mM}^{(\beta)}U_{(\alpha)}N_K^{(\alpha)} - \frac{\partial^2 P_{Ki}^{(\alpha)}}{\partial F_{\ell M}^{(\alpha)}\partial F_{iJ}^{(\alpha)}}F_{iJ,K}^{(\alpha)+}U_{(\alpha)}N_M^{(\alpha)} + \frac{\partial^2 P_{Ki}^{(\alpha)}}{\partial F_{iJ}^{(\alpha)}\partial F_{\ell M}^{(\alpha)}}\dot{F}_{iJ}^{(\alpha)+}N_M^{(\alpha)}N_K^{(\alpha)} \\
&\pm \frac{\partial^2 P_{Ki}^{(\alpha)}}{\partial U_\ell\partial F_{\ell M}^{(\alpha)}}F_{mM,K}^{(\alpha)+}U_{(\alpha)}^2 \pm \frac{\partial^2 P_{Ki}^{(\alpha)}}{\partial U_m\partial F_{\ell M}^{(\alpha)}}\ddot{x}_m^{(\alpha)+}N_M^{(\alpha)}N_K^{(\alpha)} \mp \frac{\partial^2 P_{Ki}^{(\alpha)}}{\partial F_{\ell M}^{(\alpha)}\partial U_m}\dot{F}_{mK}^{(\alpha)+}U_{(\alpha)}N_M^{(\alpha)} \\
&\mp \frac{\partial^2 P_{Ki}^{(\alpha)}}{\partial F_{mM}^{(\alpha)}\partial U_\ell}\dot{F}_{mM}^{(\alpha)+}U_{(\alpha)}N_K^{(\alpha)} + \frac{\partial^2 P_{Ki}^{(\alpha)}}{\partial U_m\partial U_\ell}\dot{F}_{mK}^{(\alpha)+}U_{(\alpha)}^2 - \frac{\partial^2 P_{Ki}^{(\alpha)}}{\partial U_\ell\partial U_m}\ddot{x}_m^{(\alpha)+}U_{(\alpha)}N_K^{(\alpha)} \\
&- \pi_i\frac{\partial J^{(\alpha)}}{\partial F_{\ell M}^{(\alpha)}}U_{(\alpha)}N_M^{(\alpha)} - J^{(\alpha)}\frac{\partial \pi_i}{\partial F_{\ell M}^{(\alpha)}}U_{(\alpha)}N_M^{(\alpha)} \pm J^{(\alpha)}\frac{\partial \pi_i}{\partial U_\ell}U_{(\alpha)}^2
\end{aligned} \tag{24}$$

$$\rho_\alpha^\circ\lambda_{i\ell m}^{(\alpha)} = -\frac{\partial^2 P_{Ki}^{(\alpha)}}{\partial F_{iJ}^{(\alpha)}\partial F_{\ell M}^{(\alpha)}}U_{(\alpha)}^3 N_M^{(\alpha)}N_K^{(\alpha)}N_J^{(\alpha)} \pm 2\frac{\partial^2 P_{Ki}^{(\alpha)}}{\partial U_\ell\partial F_{mM}^{(\alpha)}}U_{(\alpha)}^2 N_K^{(\alpha)}N_M^{(\alpha)} - \frac{\partial^2 P_{Ki}^{(\alpha)}}{\partial U_\ell\partial U_m}U_{(\alpha)}^3 N_K^{(\alpha)} \tag{25}$$

式 (24), (25) において β は $\alpha=1$ の時 2 を，$\alpha=2$ の時 1 をとる。また $\pm$ 符号は $\alpha=1$ の時上側を $\alpha=2$ の時下側の符号を取る。式 (23) の関係を式 (1) に代入すれば加速度波の振幅 $a_k^{(\alpha)}$ を支配する方程式が求まるが，この場合 $[\partial^2 T/\partial X_K^{(\alpha)}\partial t]_\alpha$ の値を $a_k^{(\alpha)}$, $U_{(\alpha)}$ などによって表示しなければならない。一次元的な加速度波の場合はエネルギー釣合式 (6) よりこのことが可能になるが，三次元的な場合は困難である。したがってつぎの仮定を設ける。 （仮定 3）： $[\partial^2 T/\partial X_K^{(\alpha)}\partial t]_\alpha = 0$ (26)

一方，式 (1) を誘導したときと同じ手法により次式が与えられる.

$$[\ddot{F}_{\ell K}^{(\alpha)}]_\alpha = -U_{(\alpha)}N_I^{(\alpha)}[\dot{F}_{\ell K,I}^{(\alpha)}]_\alpha - \dot{U}_{(\alpha)}N_K^{(\alpha)}a_\ell^{(\alpha)} - U_{(\alpha)}N_K^{(\alpha)}\dot{a}_\ell^{(\alpha)} - U_{(\alpha)}\dot{N}_K^{(\alpha)}a_\ell^{(\alpha)} \tag{27}$$

式(23),(26),(27) を式(1)に代入すれば，加速度波を支配する方程式系として次式をうる。

$$\left.\begin{aligned}\{C_{il}^{(1)}+2U_{(1)}^2\delta_{il}\}\frac{da_l^{(1)}}{dt}&=\mu_{il}^{(1)}a_l^{(1)}+\lambda_{ilm}^{(1)}a_l^{(1)}a_m^{(1)}+\Big\{\frac{1}{\rho_\alpha^\circ}\frac{\partial P_{Ki}^{(1)}}{\partial F_{lM}^{(1)}}-C_{il}^{(1)}-U_{(1)}^2N_M^{(1)}N_K^{(1)}\delta_{il}\Big\}[\dot{F}_{lM,K}^{(1)}]_1\\ \{-C_{il}^{(2)}+2U_{(2)}^2\delta_{il}\}\frac{da_l^{(2)}}{dt}&=\mu_{il}^{(2)}a_l^{(2)}+\lambda_{ilm}^{(2)}a_l^{(2)}a_m^{(2)}+\Big\{\frac{1}{\rho_\alpha^\circ}\frac{\partial P_{Ki}^{(2)}}{\partial F_{lM}^{(2)}}+C_{il}^{(2)}-U_{(2)}^2N_M^{(2)}N_K^{(2)}\delta_{il}\Big\}[\dot{F}_{lM,K}^{(2)}]_2\end{aligned}\right\}\qquad(28)$$

ここに， $\rho_\alpha^\circ\mu_{il}^{(\alpha)}=M_{il}^{(\alpha)}-3U_{(\alpha)}\dfrac{dU_{(\alpha)}}{dt}\mp 2\dfrac{\partial P_{Ki}^{(\alpha)}}{\partial v_l}\dfrac{dU_{(\alpha)}}{dt}N_K^{(\alpha)}$ (29)

いま波動の伝播する方向を$X_1^{(\alpha)}$と一致させると次式をうる。 $N_1^{(\alpha)}=1\ ,\ N_2^{(\alpha)}=N_3^{(\alpha)}=0$ (30)

なお変形をつぎのように仮定する。 （仮定 4）： $x_i^{(\alpha)}=X_I^{(\alpha)}+\tilde{x}_i^{(\alpha)}(X_1,t)$ (31)

式(31)より変形勾配は次式のようになる。 $F_{iJ}^{(\alpha)}=\delta_{iJ}+\tilde{F}_{i,1}^{(\alpha)}\delta_{J1}\ ,\ \tilde{F}_{i,1}^{(\alpha)}=\tilde{x}_{i,1}^{(\alpha)}$ (32)

式(30),(32)を考慮すれば式(28)の右辺第3項は $(\hat{E}_{il}^{(\alpha)}+\hat{D}_{il}^{(\alpha)}-U_{(\alpha)}^2\delta_{il})[\dot{F}_{l1,1}]_\alpha$ となる。一方式(13),(15)より式(30),(32)の成立するときは $(\hat{E}_{il}^{(\alpha)}+\hat{D}_{il}^{(\alpha)}-U_{(\alpha)}^2\delta_{il})\,a_l^{(\alpha)}=0$ (33)

をうる。ここに， $\hat{E}_{il}^{(\alpha)}=\frac{1}{\rho_\alpha^\circ}\partial P_{1i}^{(\alpha)}/\partial F_{l1}^{(\alpha)}$ ， $\hat{D}_{il}^{(\alpha)}=\mp\frac{1}{\rho_\alpha^\circ}(\partial P_{1i}^{(\alpha)}/\partial v_l)N_1^{(\alpha)}$ （$\alpha=1$の時$+$，$\alpha=2$の時$-$） (34)

いま $\hat{E}_{il}^{(\alpha)},\ \hat{D}_{il}^{(\alpha)}$ につぎの仮定を設ける。 （仮定 5）： $\hat{E}_{il}^{(\alpha)}$ ， $\hat{D}_{il}^{(\alpha)}$ は各々対称テンソル (35)

式(35)が成立すれば，2つの二次行列を同時に対角化する主軸（互に直交はしない）があるので，それを座標軸にとれば式(33)は次式となる。 $(U_{(\alpha)\Gamma}^2-D_\Gamma^{(\alpha)}U_{(\alpha)\Gamma}-E_\Gamma^{(\alpha)})\,a_\Gamma^{(\alpha)}=0$ （Γ: not sum） (36)

ここに，$D_\Gamma^{(\alpha)},\ E_\Gamma^{(\alpha)}$ は $\hat{D}_{il}^{(\alpha)}$ ，$\hat{E}_{il}^{(\alpha)}$ のΓ番目の主値であり $a_\Gamma^{(\alpha)}$ は主波の振幅を表わしている。式(36)よりΓ番目の主波の伝播速度として次式が求まる。 $U_{(\alpha)\Gamma}=\frac{1}{2}\{D_\Gamma^{(\alpha)}\pm\sqrt{D_\Gamma^{(\alpha)2}+4E_\Gamma^{(\alpha)}}\}$ (37)

式(37)は一組の主波の伝播速度が正の方向と負の方向とで異ることを示している。

いまこのような主波を考えれば，式(38)は右辺の第3項が消去され次式のようになる。

$$(2U_{(1)\Gamma}^2+C_\Gamma^{(1)})\frac{da_\Gamma^{(1)}}{dt}=\sum_\Delta\tilde{\mu}_{\Gamma\Delta}^{(1)}a_\Delta^{(1)}+\sum_{\Delta,\pi}\hat{\lambda}_{\Gamma\Delta\pi}^{(1)}a_\Delta^{(1)}a_\pi^{(1)}\ ,\ (2U_{(2)\Gamma}^2-C_\Gamma^{(2)})\frac{da_\Gamma^{(2)}}{dt}=\sum_\Delta\tilde{\mu}_{\Gamma\Delta}^{(2)}a_\Delta^{(2)}+\sum_{\Delta,\pi}\hat{\lambda}_{\Gamma\Delta\pi}^{(2)}a_\Delta^{(2)}a_\pi^{(2)}\qquad(38)$$

ここに，$\tilde{\mu}_{\Gamma\Delta}^{(\alpha)}$ ，$\hat{\lambda}_{\Gamma\Delta\pi}^{(\alpha)}$ は $\mu_{il}^{(\alpha)}$ ，$\lambda_{ilm}^{(\alpha)}$ の主波に対する値である。 式(38)は $a_\Gamma^{(\alpha)}$ に対し非線形の方程式であり，解を求めることは簡単でない。そこで $a_\Delta^{(\alpha)}=0$ （$\Delta\neq\Gamma$）とすれば式(38)は次式となる。

$$(2U_{(1)\Gamma}^2+C_\Gamma^{(1)})\frac{da_\Gamma^{(1)}}{dt}=\tilde{\mu}_{\Gamma\Gamma}^{(1)}a_\Gamma^{(1)}+\hat{\lambda}_{\Gamma\Gamma\Gamma}^{(1)}a_\Gamma^{(1)2}\ ,\ (2U_{(2)\Gamma}^2+C_\Gamma^{(2)})\frac{da_\Gamma^{(2)}}{dt}=\tilde{\mu}_{\Gamma\Gamma}^{(2)}a_\Gamma^{(2)}+\hat{\lambda}_{\Gamma\Gamma\Gamma}^{(2)}a_\Gamma^{(2)2}\qquad(39)$$

式(39)は積分でき，その解は各主波に対して次式のようになる。

$$\frac{a_\Gamma^{(\alpha)}(t)}{a_\Gamma^{(\alpha)}(0)}=\frac{e^{-\psi_{(\alpha)}(t)}}{1+a_\Gamma^{(\alpha)}(0)\,I_{(\alpha)}(t)}\qquad \psi_{(\alpha)}(t)=\int_0^t\tilde{\mu}_{\Gamma\Gamma}^{(\alpha)}\,d\tau\ ,\quad I_{(\alpha)}(t)=\int_0^t\hat{\lambda}_{\Gamma\Gamma\Gamma}\,d\tau\qquad(40)$$

ここに，$a_\Gamma^{(\alpha)}(0)$ は $a_\Gamma^{(\alpha)}(t)$ の初期条件である。なお，構成式に相対速度が入らない場合には，仮定5を設けなくとも以上の考察が行なえる。

式(40)より $a_\Gamma^{(\alpha)}(t)$ の消長に対しつぎのような場合のあることがわかる。① $\psi_{(\alpha)}$が正の単調増加関数で $\mathrm{sgn}\,a_\Gamma^{(\alpha)}(0)=\mathrm{sgn}\,I_{(\alpha)}(t)$ のとき $t\to\infty$ で $a_\Gamma^{(\alpha)}(t)\to 0$ ，②ある有限時間 t_a で $I_{(\alpha)}(t_a)=-1/a_\Gamma^{(\alpha)}(0)$ のとき $t\to t_a$ で $a_\Gamma^{(\alpha)}(t)\to\infty$

1) 後藤尚男・佐藤忠信；非線形多孔質弾性体中を伝わる圧縮波の伝播速度について，土木学会関西支部年次学術講演会概要 I-52 1971

2) 佐藤忠信；飽和した非線形多孔質弾性体中を伝わる simple wave について，土木学会第26回年次学術講演会概要 I-64 1971

3) 土岐憲三・佐藤忠信；二相混合体中を伝播する波動の性質，土木学会関西支部年次学術講演会概要 I-30 1972

4) Truesdell, C., & R. Toupin; Handbuch der Physik, Band III/1 Springer-Verlag 1960

5) Green, A. E., & P. M. Naghdi; A dynamical Theory of Interacting Continua, Int. J. Engng. Sci., vol.3, pp231-241, 1965

6) Crochet, M. J., & P. M. Naghdi; On Constitutive Equation for Flow of Fluid through Elastic Solid Int. J. Engng. Sci vol.4 pp383-401 1966

7) Truesdell, C.; The Non-Linear Field Theory in Mechanics, Springer-Verlag 1968