I-182　有限要素法による応力波の解析について

東北工業大学　正員　秋田宏

まえがき

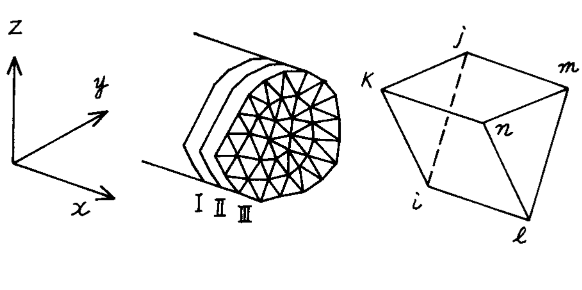
構造物の動的設計に関連して、荷重が衝撃的にかかった場合の応答を知る必要がある。より実際的な問題としては、ある有限な形をもった物体に、ある衝撃波形の荷重を作用させた時の応答を知りたい訳であるが、ここでは任意の断面形をもった無限長棒中に存在できる応力波を求める、と言った極く基本的な事柄を扱う。範囲を線形弾性に限定しても、厳密解が解析的に求められているのは無限板中のいわゆる Lamb 波と、丸棒中の Pochhammer の解だけである。これらは断面内においては一次元の問題であり、二次元の問題、例えば矩形断面となると、もはや満足すべき解が得られているとは言いがたい。

Mindlin は、断面内の函数形を三角函数の積として厳密解を求めているが、これは波速が dilatational velocity を越える場合についての解であり、最も重要な、分散曲線の低次の分枝を除外していることになる。Medick は、Legendre の多項式を用いた近似により、低次の分枝にも成り立つ解を求めているが、項数を多くとるには極めて計算がやっかいであり、又他の断面形には適用できないうらみがある。

著者は、有限要素法を用いることにより、任意断面形、無限長棒中の弾性波を解析する方法を考案したので、その概要を述べる。この方法は、本来三次元の波動現象を、x 軸方向には sin 型進行波であると仮定することにより、三次元有限要素法から出発して、準二次元有限要素法に帰着させるものである。この過程は、三次元現象を変数分離により、二変数の微分方程式に引き直して解く、解析的な常とう手段に対応している。

方法の概要

応力波の進行方向を x 軸とするデカルト座標を図の様にとる。Lamb 波、Pochhammer の解との類推から、変位は次の様に仮定できる。



$$u = U(y,z)\sin(\omega t - Kx)$$
$$v = V(y,z)\cos(\omega t - Kx)$$
$$w = W(y,z)\cos(\omega t - Kx)$$

ただし、$K = 2\pi/\Lambda$、Λ は波長、$\omega = KC$、C は位相速度。よって、Λ を与えると、図の I, II, III 断面上において対応する点同志の変位の比は簡単に知られる。

図の様な三次元の五面体要素を用い、変位関数を次の様に仮定すれば、各要素面上の変位の連続性は保証される訳である。

$$u = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 z + \alpha_5 xy + \alpha_6 xz$$

$v = \alpha_7 + \alpha_8 x + \alpha_9 y + \alpha_{10} z + \alpha_{11} xy + \alpha_{12} xz$

$w = \alpha_{13} + \alpha_{14} x + \alpha_{15} y + \alpha_{16} z + \alpha_{17} xy + \alpha_{18} xz$

ここで、x, y, z は五面体の重心を原点とした座標である。 要素の剛性マトリクスは、最初、通常の様に18行18列として求める。

各要素がⅡ断面上のある点に及ぼす力は、三次元有限要素法の考え方により、Ⅰ, Ⅱ, Ⅲ断面上の変位の一次式であるが、前述の様に結局はⅡ断面上の変位のみで表わされることになる。 この過程で要素の剛性マトリクスは9行9列に集約される。 加速度は変位に$-\omega^2$を掛けたものとなるから、運動方程式はマトリクス表示で

$[K]\{u\} - \omega^2 [M]\{u\} = 0$

又は書き直して

$([K]^{-1}[M] - 1/\omega^2 [I])\{u\} = 0$

ここで、$\{u\}$はⅡ断面上の変位成分よりなる変位ベクトル、$[I]$は単位マトリクス、$[K]$, $[M]$はそれぞれ剛性マトリクスおよび質量マトリクスであるが、通常の二次元のものとは異る。

上の固有値問題を解くことにより、ωから波速が定って分散曲線が得られ、$\{u\}$から変位の分布応力の分布等が求められる。

二、三の問題点

要素の剛性マトリクス、質量マトリクスを積分するにあたり、解析的な積分は非常にやっかいなので、要素細分割による数値積分を行った。 その結果要素内を1000個に分割した場合、東北工業大学のTOSBAC-3400-Model 41では、およそ50分を要している。 従って全く規則性のない断面形状に対してこの方法を用いるのは実用的でないが、矩形断面、六角形断面等は、規則的な要素分割をすることにより、積分計算を一度で済ますことができる。

何らかの実用に足る分割を行う場合、$[K]$, $[M]$に対しては多数の記憶場所を必要とし、しかも大部分は0である。 固有値問題の解法に累積法を用いるとすれば、0要素を記憶させない$[K]$, $[M]$を用いた計算が容易に行なえる。 ただし、$[K]^{-1}$を作る操作はかなり煩雑である。

著者は、本方法の検証のため、既に知られているLamb波との比較を試みた。 Lamb波は解析的な解として最も簡単な形をしており、又無限板の場合有限要素法を適用するのに最も節点数が少くて済むからである。 この結果および比較については、当日発表する予定である。

参考文献

1. R.D. Mindlin, E.A. Fox "Vibration and Waves in Elastic Bars of Rectangular Cross Section" Journ. of Appl. Mech. Vol. 27 1960 P152-158
2. M.A. Medick "On Dispersion of Longitudinal Waves in Rectangular Bars" Journ. of Appl. Mech. Vol. 34 1967 P714-717
3. O.C. ツィエンキーヴィッツ, Y.K. チューン 共著 吉識雅夫監訳 "マトリックス有限要素法" 培風館 1970