

北海道大学 正員 渡辺 昇  
正員 金子 孝吉

1. 予えびき

土中における沈埋函の振動を解析するに当り，ここでは次の2つの構造系について，それぞれ検討する。

- (i) 図-1 のように，沈埋函全体が長さ  $l$  の1本の桁として振動する場合
- (ii) 図-2 のように，沈埋函の壁面のみが幅  $b$ ，厚さ  $h$  の板として振動する場合

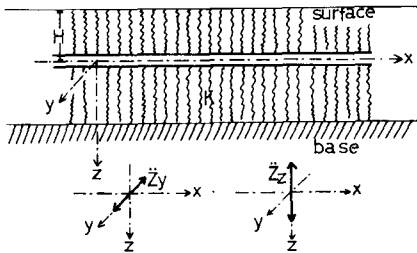


図-1

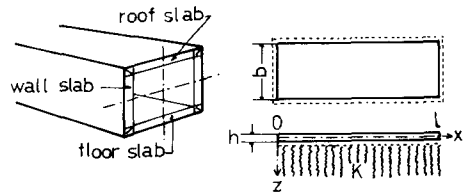


図-2

2. 沈埋函全体が1本の桁として振動する場合の振動理論とその解

弾性基礎地盤における桁の曲げ振動の方程式は図-1における  $x-z$  面内の場合，

$$EI_y \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} + Kb w(x,t) + \rho \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} + c \frac{\partial w(x,t)}{\partial t} = -\rho \ddot{x}_g(x,t) \quad (1)$$

で表わせる。ただし， $EI_y$ ； $y$ 軸まわりの曲げ剛性 ( $\text{kg}\cdot\text{cm}^4$ )， $K$ ；地盤の鉛直方向バネ係数 ( $\text{kg}/\text{cm}^2$ )， $b$ ；桁の外径 ( $\text{cm}$ )， $\gamma$ ；桁の単位重量 ( $\text{kg}/\text{cm}^2$ )， $F$ ；桁の断面積 ( $\text{cm}^2$ )， $g$ ；重力の加速度 ( $\text{cm}/\text{sec}^2$ )， $\rho = F/g$ ；単位重量密度 ( $\text{kg}\cdot\text{sec}^2/\text{cm}^2$ )， $c$ ；粘性減衰係数 ( $\text{kg}\cdot\text{sec}/\text{cm}^2$ )， $\ddot{x}_g$ ； $x$ 方向外力の加速度 ( $\text{cm}/\text{sec}^2$ ) として  $w(x,t)$ ； $x$ 方向の応答曲げ変位 ( $\text{cm}$ ) である。解を導くに， $x$ のみおよび  $t$  のみの関数  $W_n$  および  $T_n$  で表わされる式は次のようになる。

$$\frac{d^4 W_n}{dx^4} - \lambda_n^4 W_n = 0 \quad (\because \lambda_n = \sqrt[4]{(\rho \omega_n^2 - Kb) / EI_y}) \quad (2)$$

$$\frac{d^2 T_n}{dt^2} + \frac{c}{\rho} \frac{dT_n}{dt} + \omega_n^2 T_n = -R_n \ddot{x}_g(t) \quad (\because \omega_n \text{ ; 固有円振動数}) \quad (3)$$

すなわち，応答値  $w(x,t)$  は  $W_n$  および  $T_n$  の各次数における積の無限級数で表わせる。ただし，構造物の剛性が地盤の剛度より仮りに大きいものとするば  $\rho \omega_n^2 > Kb$  が言える。また式(3)における  $R_n$  は外力の展開係数である。

境界条件が決まれば式(2)を解いて，固有振動数方程式およびその根は次式のように求まる。

(i) 両端固定あるいは両端自由の場合  $\cosh \lambda_n l \cos \lambda_n l = 1$  ,  $(\lambda_1 = 4.73, \lambda_2 = 7.85, \dots)$  ----- (4)

(ii) 一端固定他端単点支持の場合  $\tanh \lambda_n l = \tan \lambda_n l$  ,  $(\lambda_1 = 3.93, \lambda_2 = 7.03, \dots)$  ----- (5)

(iii) 両端単純支持の場合  $\sin \lambda_n l = 0$  ,  $(\lambda_1 = 3.14, \lambda_2 = 6.28, \dots)$  --- (6)

(iv) 一端固定他端自由の場合  $\cosh \lambda_n l (\cos \lambda_n l) = -1$  ,  $(\lambda_1 = 1.88, \lambda_2 = 4.69, \dots)$  --- (7)

よって第  $n$  次の固有円振動数, 固有周期および固有振動数は次のようになる。

$$f_n = \sqrt{\left(\frac{\lambda_n}{l}\right)^4 \frac{EI_x}{\rho} + \frac{Kb}{\rho}} , \quad t_n = 2\pi / f_n \quad \text{and} \quad n_n = 1/t_n \quad \text{--- (8)}$$

すなわち, たとえば両端自由の場合の固有振動モード型は,

$$W_n(x) = C \left\{ (\cosh \lambda_n l - \cos \lambda_n l) (\sinh \lambda_n l + \sin \lambda_n l) - (\sinh \lambda_n l - \sin \lambda_n l) (\cosh \lambda_n l + \cos \lambda_n l) \right\} / (\cosh \lambda_n l - \cos \lambda_n l) \quad \text{--- (9)}$$

で表わすことができる。次に式(3)の時間についての応答関数は周知の Duhamel の積分形で示されるが, 展布係数  $R_n$  は直交関数である固有モード型  $W_n(x)$  を使用して展開すると次式のようなになる。

$$R_n = \frac{2 (\cosh \lambda_n l - \cos \lambda_n l) (\cosh \lambda_n l \cos \lambda_n l - 1)}{C \left\{ 3 (\sinh \lambda_n l \cos \lambda_n l - \cosh \lambda_n l \sin \lambda_n l) (\cosh \lambda_n l \cos \lambda_n l - 1) + \lambda_n l (\sinh \lambda_n l - \sin \lambda_n l)^2 \right\}} \quad \text{--- (10)}$$

### 3. 沈埋面の壁面のみが板として振動する場合の振動理論とその解

図-2に示すような弾性基礎にある矩形板要素の  $x$ - $z$  面に変位する振動方程式は自由振動のみ示すと次式で表わせる。

$$D \left( \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial y^4} \right) + K w(x,t) + \rho_a \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} + c \frac{\partial w(x,t)}{\partial t} = 0 \quad \text{--- (11)}$$

ただし,  $D = Eh^3/12(1-\nu^2)$ ,  $E$ : 板の Young 係数 ( $\text{kg/cm}^2$ ),  $\nu$ : 板の Poisson 比,  $\rho_a$ : 板材料の重量密度 ( $\text{kg}\cdot\text{sec}^2/\text{cm}^3$ ) である。

境界条件としては地震外力の吸収をみこみ隅角部の変形を考慮してヒンジ結合のみとし, 全周単純支持の場合を解くことにする。一般解は

$$w = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} T_{jk} \sin \frac{j\pi x}{l} \sin \frac{k\pi y}{b} \quad \text{--- (12)}$$

は 2 重級数で表わすことができ, 式(11)を満足する。ここに  $T_{jk}$  は 2. における板の場合と同様に Duhamel 積分で表示され, 強制外力に対する応答値も同様にして求められよう。そして固有値も,

$$f_{jk} = \sqrt{\frac{D}{\rho_a} \left\{ \left(\frac{j}{l}\right)^2 + \left(\frac{k}{b}\right)^2 \right\} \pi^4 + \frac{K}{\rho_a}} , \quad t_{jk} = 2\pi / f_{jk} \quad \text{and} \quad n_{jk} = 1/t_{jk} \quad \text{--- (13)}$$

以上 2. および 3. においては  $y$  軸まわりの曲げについて扱ったが,  $x$  軸まわりの水平方向振動に關しても同様に展開できよう。

いま 1 次モードの場合式(8) および式(13) を無次元量の式に変形してみると次式のようなになる。

(桁)  $n \sqrt{\frac{P}{Kb}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{EI_x}{Kb} \left(\frac{\lambda_1}{l}\right)^4 + 1} \quad \text{--- (14)}$

(板)  $n \sqrt{\frac{\rho_a}{K}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{D}{K} \left\{ \left(\frac{1}{l}\right)^2 + \left(\frac{1}{b}\right)^2 \right\} \pi^4 + 1} \quad \text{--- (15)}$

4. 沈埋面全体が、本の桁として振動する場合の固有振動特性を求める成果図

ここでは沈埋面の断面諸元が決まり地盤のK値が推定できる場合、式(14)における、 $EI/Kb$ なる値が適当に変化するときの無次元量  $\eta\sqrt{P/Kb}$  の値と支間長との関係を計算した。

図-3は1次振動モードの場合で、実線は両端自由(あるいは両端固定)そして破線は両端単純支持なる境界条件を用いたときの図である。図から言えることはある支間長以上になると急激に一定値0.159に漸近することによって沈埋面の単位elementの長さを決める手順を与えている。また沈埋面の固有振動特性を示すもので、固有周期および固有振動数を逆算することもできる。すなわち、

[成果図の使用例]

(例1)

コンクリート構造を有する地下鉄構築の場合を例にとると、図-4に示す

ような桁としての諸元が

$$E = 2.7 \times 10^5 \text{ (kg/cm}^2\text{)}$$

$$I_y = 8.8 \times 10^9 \text{ (cm}^4\text{)}$$

$$b = 9 \times 10^2 \text{ (cm)}$$

$$P = 3.8 \times 10^7 \text{ (kg sec}^2\text{/cm}^2\text{)}$$

$$l = 1. \times 10^3 \text{ (cm)}$$

$$K = 1.8 \text{ (kg/cm}^2\text{)}$$

であるとき、桁の固有振動数  $\eta$  および固有周期  $t$  を求める。

$$\frac{EI_y}{Kb} = \frac{2.7 \times 10^5 \times 8.8 \times 10^9}{1.8 \times 9 \times 10^2} = 1.46 \times 10^{12} \text{ cm}^4$$

$$\sqrt{\frac{P}{Kb}} = \sqrt{\frac{3.8 \times 10^7}{1.8 \times 9 \times 10^2}} = 1.53 \times 10^{-2} \text{ sec}$$

図-3より支間  $l = 10 \text{ m}$  における  $\eta\sqrt{P/Kb}$  の値は0.17であるから、両端自由(あるいは両端固定)の場合は

$$\eta = 0.17 \sqrt{\frac{Kb}{P}} = \frac{0.17}{1.53 \times 10^{-2}} = 11.1 \text{ 1/sec}, \quad t = 1/\eta = 0.09 \text{ sec}$$

以上、図-3を利用した計算法の一例を示したが、固有振動特性を簡単に把握する方法としては充分実用性を有すると思われる。

5. 沈埋面の壁面のみが振動する場合の固有振動特性を求める成果図

図-5は式(15)における  $(j,k) = (1,1)$  次モードの場合の支間  $l$  を無限に取ったときの無次元量、つまり

$$\eta\sqrt{\frac{P_a}{Kb}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{D}{K} \left(\frac{\pi}{b}\right)^4 + 1}$$

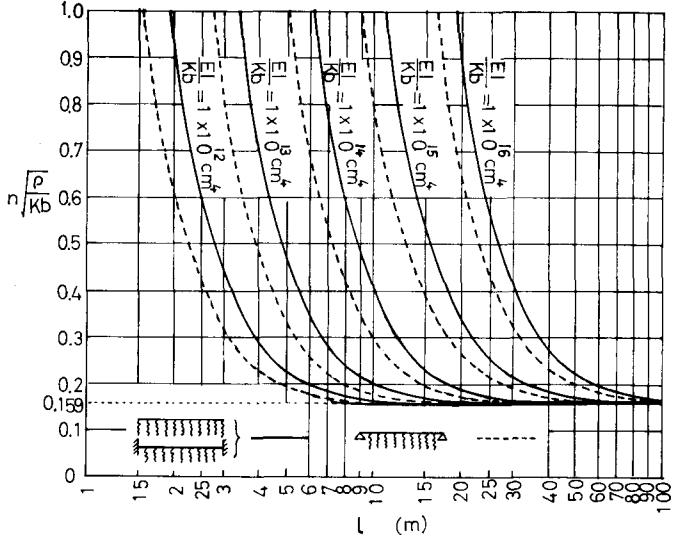


図-3

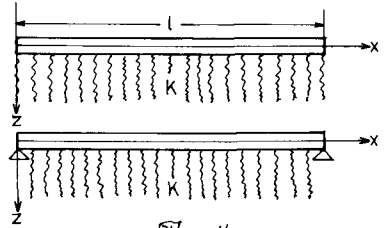
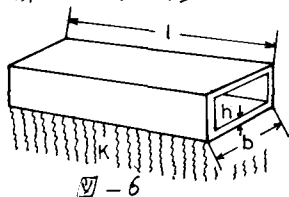


図-4

なる場合、 $D/K$  の値が適当に変化するとき無次元量  $n\sqrt{Pa/K}$  の値と板幅  $b$  との関係を示したものである。この場合は式(14)の板の式と同形であるため、図-5は図-3と同種の曲線を示し、ある板幅以上になると急激に一定値0.159に漸近する。ただ無限長の支間に較べて板幅は有限で、地下鉄構築などは2m~10m位の壁面幅に、またパイプラインなどは0.5m~5m程度に板幅はおさえられよう。

[成梁国の使用例]



(例2)

図-6において鋼製沈埋面あり、 $E = 2.1 \times 10^6$  (kg/cm<sup>2</sup>)、 $\nu = 0.3$ 、 $h = 1$  (cm)、 $b = 40$  (cm)、 $P_a = 8 \times 10^3$  (kg sec<sup>2</sup>/cm<sup>2</sup>) として  $K = 1.6$  (kg/cm<sup>3</sup>) であった。この壁面の固有振動数および固有周期を求めよ。

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} = \frac{2.1 \times 10^6 \times 1^3}{12(1-0.3^2)} \doteq 1.92 \times 10^5 \text{ (kg}\cdot\text{cm)}, \quad \frac{D}{K} = \frac{1.92 \times 10^5}{1.6} = 1.2 \times 10^5 \text{ (cm}^4\text{)}$$

図より  $b = 40$  cm で  $D/K = 1.2 \times 10^5$  cm<sup>4</sup> をひろうと  $n\sqrt{Pa/K} = 0.38$  であるから、

$$n = 0.38 \sqrt{\frac{K}{Pa}} = 0.38 \sqrt{\frac{1.6}{8 \times 10^3}} \doteq 5.37 \text{ (1/sec)}, \quad t = 1/n = 0.19 \text{ (sec)}$$

(例3)

図-6においてコンクリート製沈埋面あり、 $E = 2.7 \times 10^5$  (kg/cm<sup>2</sup>)、 $\nu = 0.1$ 、 $h = 43$  (cm)、 $b = 250$  (cm)、 $P_a = 1.1 \times 10^4$  (kg sec<sup>2</sup>/cm<sup>2</sup>) として  $K = 2.1$  (kg/cm<sup>3</sup>) 砂質であるとすの  $n$  および  $t$  は同様に、

$$D = \frac{2.7 \times 10^5 \times 43^3}{12(1-0.1^2)} = 1.8 \times 10^9 \text{ (kg}\cdot\text{cm)}, \quad \frac{D}{K} = \frac{1.8 \times 10^9}{2.1} = 8.57 \times 10^8 \text{ (cm}^4\text{)}, \quad \sqrt{\frac{K}{Pa}} = \sqrt{\frac{2.1}{1.1 \times 10^4}} = 1.38 \times 10^2 \text{ (1/sec)}$$

図より  $b = 250$  cm で  $n\sqrt{Pa/K} = 0.67$  であるから、

$$n = 0.67 \times 1.38 \times 10^2 = 92 \text{ (1/sec)}, \quad t = 0.01 \text{ (sec)}$$

6. あとがき

以上のように求めた成梁国は地盤沈下値と沈埋面の寸法諸元が与えられれば、たがいに沈埋面の固有振動特性を求めることができる。耐震設計などに利用できるものと思われる。

なお、応答計算についての報告は機会を新たにする。今後、沈埋面の耐震問題においてこの種の研究を続けてゆく予定である。

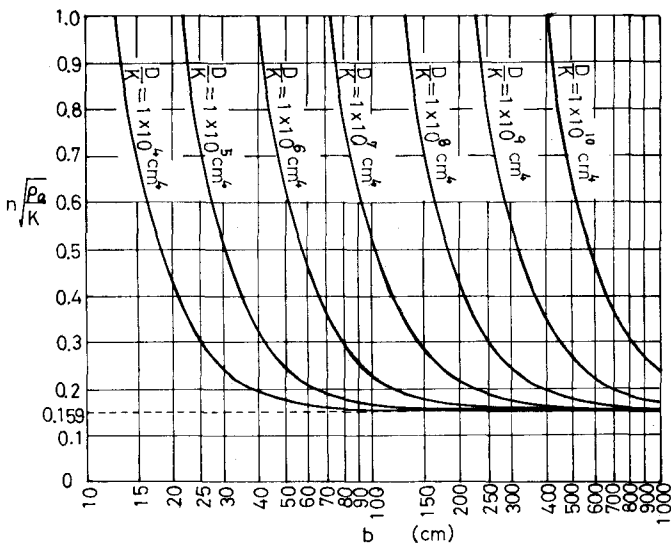


図-5