I-173 地盤上のTimoshenko type plateの動的解析

宮崎大学工学部 正員 横田 漠

1. まえがき　二層地盤あるいは道路舗装などのように，地盤上に板があるとみなせる構造系に何らかの動荷重が作用する場合の板-地盤系の相互作用の問題の一つとして，筆者は先に，Bernoulli-Euler型の板を対象にして解析を行った[1]。しかし，これを舗装問題はともかく，二層地盤に直接適用するにはかなり不合理な個があり，ここに，二層地盤に対する一つの近似解法を提示するものである。二層地盤を厳密に取り扱うことは煩雑であり，板の変形にセン断力の影響を考慮し，また慣性力に回転の項を付け加えた板（Timoshenko type plate）理論は二層地盤の特性をかなり近似的に表現出来るといわれている[2]。本論文は，このような板に，前回と同様，円型等分布荷重が周期的に作用する場合，地盤を半無限弾性体と仮定して解析を行ったものである。

2. 解法　図-1において，板の振動は次式で与えられる[3]。

$$\left(\nabla^2-\frac{\rho_1}{G'}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\left(D\nabla^2-\frac{\rho_1 H^3}{12}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\bar{w}+\rho_1 H\frac{\partial^2\bar{w}}{\partial t^2}$$
$$=\left(1-\frac{D}{G'H}\nabla^2+\frac{\rho_1 H^2}{12G'}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)q$$

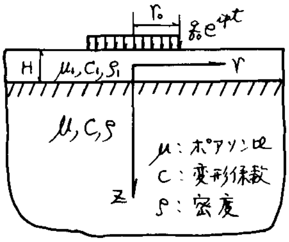


図-1

ここに

$G'=k^2G_1$，$q=q_2-q_1$，$\nabla^2=\partial^2/\partial r^2+1/r\cdot\partial/\partial r+1/r^2\cdot\partial^2/\partial\theta^2$

q_2：上載荷重，q_1：地盤反力

変形の対称条件および定常状態を考えれば，上式は

$$\left[\left(\nabla^2+\frac{\rho_1H^3}{12D}p^2\right)\left(\nabla^2+\frac{\rho_1}{G'}p^2\right)-\lambda^4\right]\cdot\overline{W}(r)$$
$$=\frac{1}{D}\left(1-\frac{D}{G'H}\nabla^2-\frac{\rho_1H^2}{12G'}p^2\right)\left[Q_2(r)-Q_1(r)\right] \qquad (1)$$

ここに　$\lambda^4=\rho_1Hp^2/D$，$\bar{w}=\overline{W}(r)\cdot e^{ipt}$，$q=\left[Q_2(r)-Q_1(r)\right]e^{ipt}$

他方，半無限弾性体に関して変位，応力は

$$w=\left[A_0\frac{\alpha}{h^2}e^{-\alpha z'}-C_0\frac{k^2}{j^2}e^{-\beta z'}\right]H_0^{(2)}(kr)\,e^{ipt}$$
$$\sigma_z=G\left[A_0\frac{-2k^2+j^2}{h^2}e^{-\alpha z'}+2C_0\frac{\beta k^2}{j^2}e^{-\beta z'}\right]H_0^{(2)}(kr)\,e^{ipt} \qquad (2)$$
$$\tau_{zr}=G\left[A_0\frac{2\alpha}{h^2}e^{-\alpha z'}-C_0\frac{k^2+\beta^2}{j^2}e^{-\beta z'}\right]\frac{\partial H_0^{(2)}(kr)}{\partial r}\,e^{ipt}, \qquad \tau_{z\theta}=0$$

ここに

$k^2=\alpha^2+h^2=\beta^2+j^2$，$h=p/v_L$，$j=p/v_T$，$z'=z-H/2$

なお，上式において$z'\to\infty$のとき変位，応力が0または進行波に限られるので，α，βは正の実数かまたは正の虚数を意味する。

板と地盤との接触面（$z'=0$）にて次のような連続条件式を考える。

$$[w]_{z'=0}=\bar{w}, \quad [\sigma_z]_{z'=0}+q_1=0, \quad [\tau_{zr}]_{z'=0}=0 \qquad (3)$$

また，上載荷重q_2をFourier-Bessel積分にて表示すれば

$$Q_2(r)=\frac{P}{\pi r_0}\int_0^\infty J_1(kr_0)\,J_0(kr)\,dk \qquad (4)$$

式(1)，(2)，(3)および(4)より積分定数A_0，C_0を決定し，板のたわみおよび地盤の応力の式を求めれば，結局，次式で与えられる。

$$\bar{w} = \frac{P \cdot H^2}{\pi D R_0} \int_0^\infty \mathbb{U}(\varsigma) d\varsigma \cdot e^{ipt} , \quad \mathbb{U}(\varsigma) = \frac{\nu\,(1 + \Phi(\varsigma))}{\mathbb{K}(\varsigma) - \Psi(\varsigma)} J_1(\varsigma a_0) J_0(\varsigma a) \tag{5}$$

$$\sigma_z = \frac{PG}{\pi D} H \int_0^\infty \mathbb{V}(\varsigma) d\varsigma \cdot e^{ipt} , \quad \mathbb{V}(\varsigma) = \frac{a_0}{R_0^2} \cdot \frac{1 + \Phi(\varsigma)}{\mathbb{K}(\varsigma) - \Psi(\varsigma)} \Omega(\varsigma) J_1(\varsigma a_0) J_0(\varsigma a) \tag{6}$$

ここに $\mathbb{K}(\varsigma) = \nu \varepsilon^3 \varsigma^4 - 6 \frac{\bar{\rho}}{g}(1-\mu_1)\varepsilon\nu - 6\frac{1-\mu_1}{g}\mathbb{R}(\varsigma)$， $\mathbb{R}(\varsigma) = (2\varsigma^2-1)^2 - 4\varsigma^2\nu\nu'$

$\Psi(\varsigma) = 6\frac{1-\mu_1}{g}\Phi(\varsigma)\mathbb{R}(\varsigma) + \frac{\bar{\rho}}{2g}(1-\mu_1)\left(1+\frac{2}{\kappa^2(1-\mu_1)}\right)\varepsilon^2\nu\varsigma^2 - \frac{1-\mu_1}{2\kappa^2}\left(\frac{\bar{\rho}}{g}\right)^2\varepsilon^3\nu$

$\Phi(\varsigma) = \frac{\varepsilon^2}{6(1-\mu_1)\kappa^2}\varsigma^2 - \frac{\varepsilon^2\bar{\rho}}{12\kappa^2 g}$， $\Omega(\varsigma) = (2\varsigma^2-1)^2 e^{-\nu z'} - 4\varsigma^2\nu\nu' e^{-\nu' z'}$， $\nu = (\varsigma^2-\gamma^2)^{1/2}$

$\nu' = (\varsigma^2-1)^{1/2}$， $\varsigma = k/j$， $\varepsilon = a_0/R_0 = jH$， $a_0 = r_0 j$， $a = rj$， $R_0 = r_0/H$， $g = G_1/G$， $\bar{\rho} = \rho_1/\rho$， $\gamma = h/j$

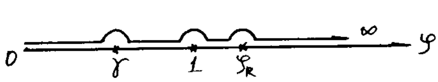
3. 算例

いま，$\mu_1 = 1/6$，$\mu = 1/4\ (\lambda = G)$，$\rho_1 = 2.3\ g/cm^3$，$\rho = 1.8\ g/cm^3$ および $R_0 = 1.0$ とし，$\bar{\kappa} = C_1/C$ およびa_0の種々の値に対して，荷重中心点($a=0$)における板のたわみ$\bar{w}$および地盤の応力σ_zを求めれば次の通りである。

表－1

$\bar{\kappa}$	a_0	ς_R
10	0.1	1.112499636 1200
	0.2	1.136 2609009350
	0.3	1.151 2489034030
	0.4	1.151 6948772778
	0.5	1.138 33968 22024
	0.6	1.116 3203079226
	0.7	1.0908116819391
	0.8	1.0653596044242
	0.9	1.0421300453558
	1.0	1.0225708722415
10^3	0.1	1.0635320194521

式(5)，(6)の被積分函数は，たとえば表－1に示すように極ς_Rを有しており，この発散積分を何らかの形で正則化するように積分路を選ばなければならず，いま，ν，ν'の(無限遠の)条件を満足するような図－2に示すような積分路を選ぶ。



図－2

このとき，式(5)，(6)の積分は，たとえば

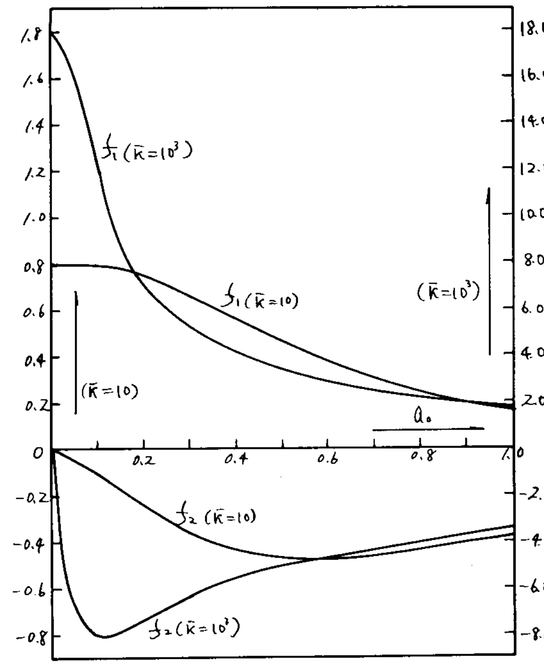
$$[\bar{w}]_{a=0} = \frac{P \cdot H^2}{\pi D R_0}\left[V.P\int_0^\infty \mathbb{U}(\varsigma)d\varsigma - i\pi \mathrm{Res}(\mathbb{U}(\varsigma);\varsigma_R)\right] \times e^{ipt}$$

の形で表わされ，上式の数値計算の結果を

$$[\bar{w}]_{a=0} = \frac{P \cdot H^2}{\pi D R_0}\left[f_1(\bar{\kappa},a_0) + i f_2(\bar{\kappa},a_0)\right] \cdot e^{ipt}$$

$$[\sigma_z]_{a=0} = \frac{P \cdot G}{\pi D} H \left[h_1(\bar{\kappa},a_0) + i h_2(\bar{\kappa},a_0)\right] e^{ipt}$$

で示し，その一部を図－3に示す。



図－3

(参考文献)

1) 横田，"垂直周期荷重による弾性地盤上の板の相互作用"，九大.工学集報，第45巻，第2号，昭和47年3月

2). J. D. Achenbach "Free Waves in a plate supported by a Semi-Infinite Continuum", Jour. of Appl. Mech., June 1967, Vol 34.

3). R. D. Mindlin, "Influence of Rotatory Inertia and Shear on Flexural Motion of Isotropic, Elastic Plates", Jour. of Appl. Mech., Vol 18, 1951