

鹿島建設株式会社 正会員 佐々木 猛

" " 成田 知明

" " ○ 松本 喬

1. はじめに

地震の比較的多い我国においては、土木構造物その他の設計、施工にあたり、耐震的な考慮を払わねばならないことは常識となっている。地震による被害は構造物によって差はあるが、その構造物の基礎にかなり大きく支配されることは周知のとおりである。基礎と地盤の地震応答を対象とする場合基礎と地盤とが動的に相関連し、因果対応的に連成挙動する相互作用が大きな問題で、最近重視された課題の一つである。さらに、実際の設計計算の対象となる地震動は強大であり、地盤は完全弾性体でなく、弾塑性体の性質を有することから、弾塑性地震応答を求める必要がある。ここでは、有限要素法に弾塑性理論を取り入れ、構造物-地盤系の非線形地震応答をできるだけ忠実に再現する一つの試みを行なったので、そのモデル化と解析方法及び適用例を述べる。

2. 解析モデルおよび要素の特性

構造物も地盤も本来三次元の拡がりを持つが、二次元的に取扱ってもその性質を充分表わすことができると考え、基礎-地盤系を二次元平面問題として解析を行っている。平面条件として、構造物基礎体は、平面応力、地盤は弾性、塑性変形を通じて平面歪状態が成り立つものとした。なお、構造物基礎体は、弾性とし、地盤のみに弾塑性変形を考慮している。有限要素としては、三角形要素を用いた。

i) 質量マトリックス

要素の質量マトリックスの決め方には種々あるが、ここでは三角形要素の質量を、重心と頂点との距離に反比例させて各頂点に分配する集中質量系を用いた。すなわち、重心と各頂点との距離を、 G_1 、 G_2 、 G_3 とすると、質量の各頂点への分配率は、次のようにして求められる。

$$R_1 = (1/G_1) / (1/G_1 + 1/G_2 + 1/G_3) = G_2 \cdot G_3 / (G_1 \cdot G_2 + G_2 \cdot G_3 + G_3 \cdot G_1)$$

同様にして、 R_2 、 R_3 も計算される。

ii) 剛性マトリックス

地盤を歪硬化を伴う弾塑性体とみなすと、その応力-歪関係式は、降伏条件式 $f = f(\sigma_{ij}, \kappa)$ を与えられると、下式により一義的に定まる。応力-歪関係式が求まれば、仮想仕事の原理を適用して、簡単に求められる。以下記述の便宜上、tensor summation convention を適用する。

歪増分は、弾性歪増分と塑性歪増分の和で表わされる。

$$d\epsilon_{ij} = d\epsilon^e_{ij} + d\epsilon^p_{ij} \quad (1)$$

ただし、 $d\epsilon_{ij}$ は歪増分、 ϵ^e_{ij} は弾性歪、 ϵ^p_{ij} は塑性歪である。弾性範囲内ではHook則に従うので、

$$d\sigma_{ij} = E_{ijkl} d\epsilon^e_{kl} \quad (2)$$

$d\sigma_{ij}$ は応力増分、 E_{ijkl} は弾性定数である。今、地盤を等方性と仮定しているもので、 E_{ijkl} は、次のように簡単になる。ただし、 μ 、 λ はLameの定数であり、 δ はKroneckerのデルタである。

$$E_{ijkl} = \mu (\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) + \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} \quad (3)$$

降伏条件式を，塑性ポテンシャルと考えると，flow rule（塑性流れの法則）に従って，

$$d\epsilon_{ij}^p = d\lambda(\partial f/\partial \sigma_{ij}) \quad (4)$$

$d\lambda$ は正值のスカラー不確定定数である。さらに降伏条件式を微分すると，chain ruleにより，

$$df = (\partial f/\partial \sigma_{ij})d\sigma_{ij} + (\partial f/\partial \kappa)d\kappa \quad (5)$$

ここで， κ は“hardening”parameter である。いま H' を単軸試験での応力-歪関係の接線勾配とすると，以上の関係から，結局次のような塑性歪-応力関係を得る。

$$d\sigma_{ij} = P_{ijkl}d\epsilon_{kl} \quad (6)$$

$$P_{ijkl} = E_{ijkl} - \frac{E_{ijst}\{(\partial f/\partial \sigma_{qr})E_{qrkl}(\partial f/\partial \sigma_{st})\}}{H' + \{(\partial f/\partial \sigma_{mn})E_{mnop}(\partial f/\partial \sigma_{op})\}} \quad (7)$$

土や岩石では，塑性変形に伴う体積変化が認められ，降伏条件式においてもこのことを考慮しなければならない。ここでは次式で表示される Drucker と Prager の降伏条件式⁽²⁾を用いる。

$$f = \alpha J_1 + \sqrt{J_2} - k = 0 \quad (8)$$

J_1, J_2' は応力の座標変換における 1 次と 2 次の不変量であり， α と k は定数である。

$$J_1 = \sigma_{ii} ; J_2' = \frac{1}{2}(\sigma_{ij} - J_1/3 \cdot \delta_{ij})(\sigma_{ij} - J_1/3 \delta_{ij}) \quad (9)$$

(8)式は，平面歪状態では，Coulomb の降伏条件と一致し，定数 α ， k と内部摩擦角 ϕ ，粘着力 C との間には，次の関係が成り立つ。

$$\alpha = \sin \phi / (9 + 3 \sin^2 \phi)^{1/2} ; k = 3C \cos \phi / (9 + 3 \sin^2 \phi)^{1/2} \quad (10)$$

iii) 減衰ストリックス

構造物，地盤の減衰については，現在のところその実体が不明で，構造物基礎-地盤系の減衰としては，地下逸散減衰が最も大きいと推定されている。ここでは，減衰が粘性形の減衰をずるとし，質量マトリックスに比例すると仮定している。

4. 地震の入力

地表面に基礎をおく構造物に対して地震が入力する場合，応答変位 U^e は，境界の変位 U^d と，それ以外の節点変位 U に分離できる。さらに，全応答変位は準静的変位 U^s と動的変位 U の和で表わされる。ここで，準静的変位とは，節点の慣性力を無視した場合の境界変位のみによる節点変位である。

$$\{U_t^e | U_t^d\}^T = \{U_s^e | U_s^d\}^T + \{U_t^e | U_t^d\}^T \quad (11)$$

サフィックス t は，時刻 t における変位を示している。以上のことから，連成系モデルの振動方程式は，次式のようになる。

$$\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ \dots & \dots \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{U}_t \\ \ddot{U}_t^d \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ \dots & \dots \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{U}_t \\ \dot{U}_t^d \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ \dots & \dots \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_t \\ U_t^d \end{Bmatrix} = \{0\} \quad (12)$$

右辺が null vector になっているのは，全システムに直接外力が働かないことを示している。いま減衰項は無視できると仮定し，準静的変位の定義から次式を得る。

$$[K_{11}]\{U_s\} + [K_{12}]\{U_s^d\} = \{0\} \quad (13)$$

(11)~(13) 式より，動的変位に関する (14) 式を得る。

$$[M_{11}]\{\ddot{U}\} + [C_{11}]\{\dot{U}\} + [K_{11}]\{U\} = \{P_{eff}(t)\} \quad (14)$$

$$\{P_{eff}(t)\} = [M_{11}K_{11}^{-1}K_{12}]\{\ddot{U}_s^d\} \quad (15)$$

結局、地震外力は、(15)式で評価される。⁽³⁾

5. 地震応答計算法

地盤が(3)式で与えられる弾性範囲内で振動をする時、固有振動数及び固有モードが存在し、固有モードを列ベクトルとする固有モードマトリックス $[\Phi]$ を定義すると、固有モードの直交性より、

$$[\Phi]^T [M] [\Phi] = [I], [\Phi]^T [K] [\Phi] = [\omega^2], [\Phi]^T [C] [\Phi] = 2[\xi\omega] \quad (16)$$

ただし、 ξ は減衰定数、 ω は固有振動数である。この(16)式の性質を用いた、いわゆるモーダル・アナリシスを適用すれば、迅速に動的応答を求めることができる。しかし、地盤を弾塑性体とみなすと、(7)式から理解できるように、応力-歪マトリックス P_{ijkl} は、応力履歴に依存し、固有振動数固有モードが存在せず、モーダル・アナリシスも適用できない。従って、(14)式を、step-by-step に直接数値積分を行なう。直接数値積分の方法としては、Runge-Kutta法を用いる。いま、(14)式において、 $\{Z\} = \{\dot{U}\}$ とおくと、(14)式は次のようになる。

$$[M_{11}]\{\dot{Z}\} + [C_{11}]\{Z\} + [K_{11}]\{U\} = \{P_{eff}(t)\} \quad (17)$$

したがって、初期条件式を与えると、変位、速度、加速度の応答は、次式で表わされる。

$$\left. \begin{aligned} \{U\}_{n+1} &= \{U\}_n + \{k\} \\ \{\dot{U}\}_{n+1} &= \{Z\}_{n+1} = \{Z\}_n + \{l\} \\ \{\ddot{U}\}_{n+1} &= \{\dot{Z}\}_{n+1} = [M_{11}]^{-1} [\{P_{eff}(t)\} - [C_{11}]\{Z\}_{n+1} - [K_{11}]\{U\}_{n+1}] \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

ただし、サフィックス $n, n+1$ は、それぞれ n 番目、 $n+1$ 番目の time step の値であることを示す。

また、 $\{k\}, \{l\}$ は次式で表わせる。 Δt は時間刻み幅である。

$$\begin{aligned} \{k\} &= \frac{1}{2} [\{k_1\} + 2\{k_2\} + 2\{k_3\} + \{k_4\}] ; \{l\} = \frac{1}{6} [\{l_1\} + 2\{l_2\} + 2\{l_3\} + \{l_4\}] \\ \{k_1\} &= \Delta t \cdot [Z]_n ; \{l_1\} = \Delta t \cdot [M_{11}]^{-1} [-[C_{11}]\{Z\}_n - [K_{11}]\{U\}_n + \{P_{eff}(t)\}] \\ \{k_2\} &= \Delta t \cdot [Z]_{n+\frac{1}{2}} ; \{l_2\} = \Delta t \cdot [M_{11}]^{-1} [-[C_{11}](\{Z\}_{n+\frac{1}{2}} + \{l_1\}) - [K_{11}](\{U\}_{n+\frac{1}{2}} + \{k_1\}) + \{P_{eff}(t)\}] \\ \{k_3\} &= \Delta t \cdot [Z]_{n+\frac{3}{2}} ; \{l_3\} = \Delta t \cdot [M_{11}]^{-1} [-[C_{11}](\{Z\}_{n+\frac{3}{2}} + \{l_2\}) - [K_{11}](\{U\}_{n+\frac{3}{2}} + \{k_2\}) + \{P_{eff}(t)\}] \\ \{k_4\} &= \Delta t \cdot [Z]_{n+1} ; \{l_4\} = \Delta t \cdot [M_{11}]^{-1} [-[C_{11}](\{Z\}_{n+1} + \{l_3\}) - [K_{11}](\{U\}_{n+1} + \{k_3\}) + \{P_{eff}(t)\}] \end{aligned}$$

6. 数値解析例

i) 適用モデル及び有限要素モデル

計算例として使用したモデルは、Fig.1 に示すもので、下部が基岩である深さ 70m、幅 250m の地盤の中央に、幅 5 m、深さ 10m の構造物基礎（斜線部）が存在するモデルについて解析する。地盤は、実際には半無限連続体に近いことから、できるだけ広い範囲までとるのが理想的であるが、コンピュータの容量や解析の都合上、この範囲を限定する必要がある。ここでは、山田博士らの研究結果⁽⁴⁾である、“深さに対して拘束壁までの距離を 2 倍以上にとればよい”という結論に従って、地盤の幅を決定した。この有限要素モデルは、Fig.2 に示している。

ii) 弾性時の固有振動数及び固有モード

Fig.1 Foundation-Structure System Model
Lower Structure
 $E=2.1 \times 10^6 \text{ t/m}^2, \nu=0.17$

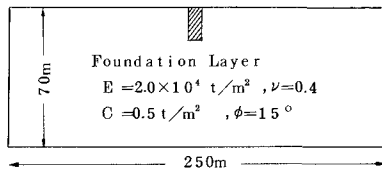
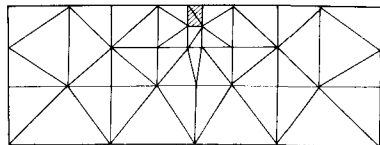


Fig.2 Finite-Element Idealization



地盤を弾塑性体と仮定して、弾塑性地震応答を得る前に、動的挙動の大まかな性質を知るために、地盤を弾性体と仮定して、固有振動数及び固有モードをJacobi法によって計算した結果がFig.3であり、この図から、次のことが云える。

a. 固有振動モードは、基本的には、水平方向、上下方向、ロッキングが卓越するモードからなり横方向の拡がり比较大的大きいこのモデルでは、水平方向が卓越するモードが一次の固有周期に対応している。

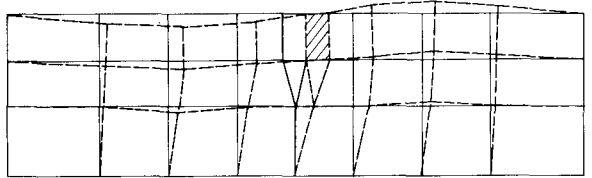
b. このモデルでは、基礎の固有振動数は、地盤のみの固有振動数とほぼ同じ値になり、基礎は地盤の振動に従って振動している。

iii) 強制外力による動的応答

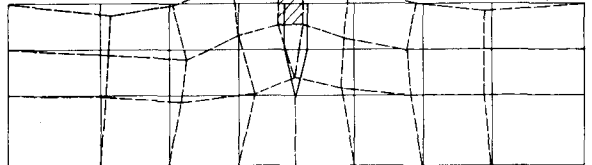
下部の基礎上にある境界接点に強制外力として、水平方向に加速度としてsin curveを与え、その最大加速度の $\frac{1}{4}$ を鉛直方向に与えている。一例として、水平方向に最大加速度80gal、周期0.4secの外力を与えた時の応答を基礎体上の一節点について示したのがFig.4である。0.7secで塑性領域に入った要素が発生している。計算は、3.0secまで行なったが、1.1secで過大な応答変位を生じ、解が発散状態になった、この原因は、地盤が破壊したか、静的問題において、塑性が進行するか、除荷の状態にあるかを判別するdλの理論を、そのまま動的問題に使用しているためと思われる、今後の問題として検討中である。

Fig.3 Free Vibrations Modes & Period

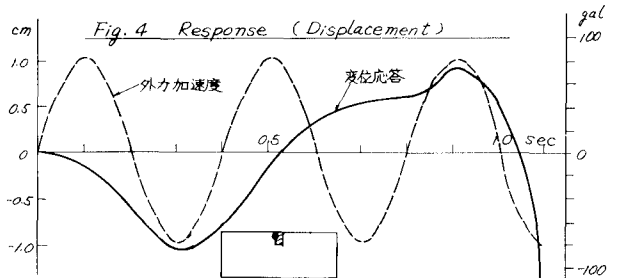
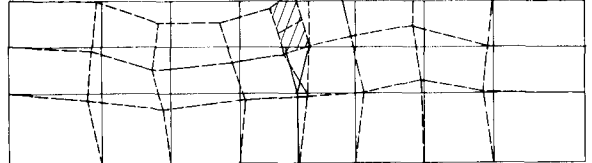
1st Mode $T=1.15$ sec



2nd Mode $T=0.89$



3rd Mode $T=0.77$ sec



参 考 文 献

- 1) Pedro V.Marcal ; Finite Element Analysis with material Nonlinearities ... Theory and Plactice, Japan-U.S.Seminar on Matrix Methods of Structural Analysis and Design, 1969
- 2) Drucker, D.C. & Prager, W. ; Soil Mechanics and Plastic Analysis or Limit Design, Qtly Applied Maths. vol. 10, 1952
- 3) R.W. Clough ; Application of the Finite Element Method to Problems of Structural Dynamics, NATO Advanced Study Institute on F.E.M. in continuum Mechanics, 1971
- 4) 山田善一, 松村博 ; 有限要素による基礎-地盤系の振動解析, 日本鋼構造協会マトリックス構造解析講演論文集, 1969