

1. まえがき 構造物基礎部の根入れが浅い場合は、その周辺地盤の物理特性の平均的取扱いはより、これを準均質な地盤としての取扱いが許されよう^(1),2)。しかるに近年の土木構造物の大型化は、必然的にその埋設部の規模をも増大せしめ、それゆえ支持系としての周辺地盤の取扱いに地盤の局所的な差異をも考慮せざるを得なくなってきた。ここでは地盤を構造地質学的に最も簡単な、各層内では等方均質である平状地盤が、堅い基盤上に幾重にも堆積しているものを対象としている。この地盤中に円柱基礎が基盤面まで根入れされているような系に、鉛直下より地震波が来襲するときの構造物の応答を連成振動系として解析したものである。

2. 多層地盤内の波動伝播 地盤内変位の水平成分のみを考慮するとき、基盤より上第*j*層地盤の運動方程式は

$$\rho_j \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} = (\mu_j + \mu_j' \frac{\partial}{\partial t}) \frac{\partial^2 u_j}{\partial z^2} - \rho_j \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2}, \quad (j=1, 2, \dots, n) \quad \dots (1)$$

と書ける。ここに、 ρ_j, μ_j, μ_j' は図1のように、第*j*層の密度せん断弾性係数および粘性減衰係数、さらに u_j, u_0 は各々第*j*層の地盤の相対水平変位および入射波の水平変位である。このとき、式(1)の解 $u_j(z; t)$ は以下の変位と応力の境界条件式を満足せねばならないことは明らかである。

$$\left. \begin{aligned} z=0: u_1 &= 0 \\ z=H_1: u_1 &= u_2, \quad (\mu_1 + \mu_1' \frac{\partial}{\partial t}) \frac{\partial u_1}{\partial z} = (\mu_2 + \mu_2' \frac{\partial}{\partial t}) \frac{\partial u_2}{\partial z} \\ \dots \dots \dots \\ z=H_1 + \dots + H_{j-1}: u_j &= u_{j+1}, \quad (\mu_j + \mu_j' \frac{\partial}{\partial t}) \frac{\partial u_j}{\partial z} = (\mu_{j+1} + \mu_{j+1}' \frac{\partial}{\partial t}) \frac{\partial u_{j+1}}{\partial z} \\ \dots \dots \dots \\ z=H_1 + \dots + H_n: (\mu_n + \mu_n' \frac{\partial}{\partial t}) \frac{\partial u_n}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots (2)$$

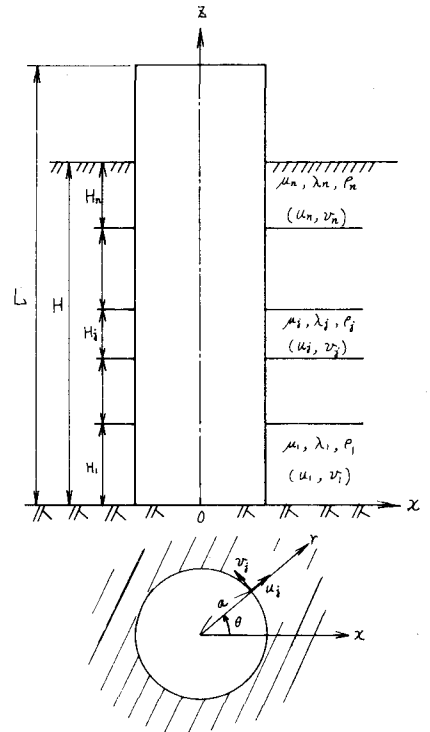


図1 地盤と構造物のモデル

しかるに、各層の変位 $u_j, (j=1, 2, \dots, n)$ は変数分離型の解を持つので、ここで各層における物理定数の比 μ_j'/μ_j を一定と仮定すると、境界条件式(2)において μ_j' ($j=1, 2, \dots, n$) を含んだ項を省略することができる。

ところで、この多層地盤の固有関数 $\{\Sigma_m(z), m=1, 2, \dots\}$ は、式(1)の非減衰自由振動の式を満足するので、 $\mu_j' = 0$ とし、時間項 $\exp(i\omega t)$ を省略することにより、次式をうる。

$$\frac{d^2 \Sigma_m^{(j)}(z)}{dz^2} + \frac{\Sigma_m^2}{V_j^2} \Sigma_m^{(j)}(z) = 0, \quad (j=1, 2, \dots, n; m=1, 2, \dots) \quad \dots (3)$$

この式(3)の解は上昇波と下降波の和で与えられることは明らかであるから、

$$\Sigma_m^{(j)}(z) = A_j e^{i\alpha_m^{(j)} z} + B_j e^{-i\alpha_m^{(j)} z}, \quad (j=1, 2, \dots, n; m=1, 2, \dots) \quad \dots (4)$$

として、境界条件式(2)に代入すると、積分定数 $A_j, B_j, (j=1, 2, \dots, n)$ に関する $2n$ 元齊次連立方程式をうる。したがって、それらが有意な解を持つために、その係数行列式を 0 と置くことにより、次式のような一般的な行列表示による振動数方程式をうる。

$$A_1^T [A_2, B_2] [A_3, B_3] \cdots [A_{n-2}, B_{n-2}] [A_{n-1}, B_{n-1}] B_n = 0, \quad (n \geq 2) \quad \dots\dots (5)$$

$$\text{こゝに, } A_1 = \begin{bmatrix} i \rho_m^{(1)} \\ C_m^{(1)} \end{bmatrix}, \quad A_j = \begin{bmatrix} R_{j,j-1} C_m^{(j)} \\ i \rho_m^{(j)} \end{bmatrix}, \quad B_j = \begin{bmatrix} i R_{j,j-1} \rho_m^{(j)} \\ C_m^{(j)} \end{bmatrix}, \quad (j=2, 3, \dots, n) \quad \dots\dots (6)$$

$$\rho_m^{(i)} = \sin \alpha_m^{(i)} H_j, \quad C_m^{(i)} = \cos \alpha_m^{(i)} H_j, \quad R_{ij} = \frac{\mu_i \alpha_m^{(i)}}{\mu_j \alpha_m^{(j)}} = \frac{\rho_i V_i}{\rho_j V_j}, \quad (i > j) \quad \dots\dots (7)$$

よす、 $\alpha_m^{(i)} = \zeta_m / V_i$: 鉛直方向の波数、 ζ_m : m 層地盤の m 次元固有振動数、 $V_j = \sqrt{\mu_j / \rho_j}$: 第 j 層の横波伝播速度。一方、式(5)に対応する $n=1$ の場合の振動数方程式は、 $\cos \alpha_m^{(1)} H_1 = 0, (m=1, 2, \dots)$ となければならぬが、この場合は基盤上の均質 1 層地盤の場合に他ならぬ。ところで、式(5)の振動数方程式の各行列 $[A_j, B_j]$ は中間層(第 j 層)の特性を代表するものであって、この行列によって各層の存在が成層地盤の振動数方程式への関与の割合を示しているものといえよう。さらに、各行列の構成要素は実数および純虚数で与えられてはいるが、式(5)の全体は実数方程式であることは容易に確かめられよう。

かくして、 n 層地盤の固有値が式(5)から得られれば、これに対応する固有関数 $\{Z_m^{(i)}\}$ は式(4)より与えられ、一般的に表すことは困難ではあるが、例えば $n=3$ の場合を以下式で与えられる。

$$Z_m^{(i)}(z) = \begin{cases} \frac{1}{\rho_m^{(1)}} [C_m^{(1)} C_m^{(2)} - R_{32} \rho_m^{(2)} \rho_m^{(3)}] \sin \alpha_m^{(1)} z, & \text{または } \frac{1}{C_m^{(1)}} [R_{21} \rho_m^{(1)} C_m^{(2)} + R_{31} C_m^{(1)} \rho_m^{(3)}] \sin \alpha_m^{(1)} z, \quad 0 \leq z \leq H_1 \\ \rho_m^{(2)} \cos \alpha_m^{(2)} (H_1 + H_2 - z) - R_{32} \rho_m^{(3)} \sin \alpha_m^{(2)} (H_1 + H_2 - z), & H_1 \leq z \leq H_1 + H_2 \\ \cos \alpha_m^{(3)} (H - z), & H_1 + H_2 \leq z \leq H \end{cases} \quad \dots\dots (8)$$

ただし、この固有関数 $\{Z_m^{(i)}\}$ は重み関数を $w(z)$ とすると

$$w(z) = \begin{cases} w_1 = \rho_1, & (0 \leq z \leq H_1) \\ w_2 = \rho_2, & (H_1 \leq z \leq H_1 + H_2) \\ \dots\dots\dots \\ w_n = \rho_n, & (H_1 + \dots + H_{n-1} \leq z \leq H) \end{cases} \quad \dots\dots (9)$$

のとき、式(2)の関係を用いると、以下のような直交性を示す。

$$\int_0^H w^{(l)}(z) Z_l^{(l)}(z) Z_m^{(m)}(z) dz = \begin{cases} 0, & (l \neq m) \\ J_{ll}, & (l = m) \end{cases} \quad \dots\dots (10)$$

$$\text{こゝに, } J_{ll} = \rho_l \int_0^{H_l} \{Z_l^{(l)}\}^2 dz + \dots + \rho_n \int_{H_1 + \dots + H_{n-1}}^H \{Z_l^{(n)}\}^2 dz \quad \dots\dots (11)$$

かくして得られた成層地盤の固有関数 $\{Z_m^{(i)}\}$ を用いて、入射波 $u_B = A_0 \exp(i\omega t)$ に対する式(1)の解 $u(z;t)$ を展開すれば次式をうる。

$$u(z;t) = A_0 e^{i\omega t} \sum_{m=1}^{\infty} A_m \frac{\omega^2}{\zeta_m^2} Z_m(z) \quad \dots\dots (12)$$

$$\text{ただし, } A_m = [e_1 \int_0^{H_1} Z_m^{(1)} dz + \dots + e_n \int_{H_1 + \dots + H_{n-1}}^H Z_m^{(n)} dz] / [e_1 \int_0^{H_1} \{Z_m^{(1)}\}^2 dz + \dots + e_n \int_{H_1 + \dots + H_{n-1}}^H \{Z_m^{(n)}\}^2 dz] \quad \dots\dots (13)$$

および $\xi_m^2 = (1 + 2i\eta\omega/\omega_0)\xi_m^2 - \omega^2$, $\mu_j'/\mu_j = \mu_j'/\mu_j = 2\eta/\omega_0$, η : 減衰定数, ω_0 : 基準円振動数.

3. 構造物の地震応答 構造物が基礎よりの慣性力のみならず, 式(12)のよう側方よりの外力を受けて運動するが, このとき構造物の表面より放射された波動が無限度に消散する. この放射波は各層間を反射・屈折をくり返しをくりながら, 水平方向に伝播するので, いわゆる分散性を示すようになる. この水平方向にも伝播するせん断波(SH波)に関しては, 以下の方程式

$$\frac{1}{V_j^2} \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_j}{\partial z^2}, \quad (j=1, 2, \dots, n) \quad \dots\dots (14)$$

と与えられることは明らかである. ここで鉛直・水平両方向の伝播波数を各々, $\beta^{(j)}$ (第 j 層) および α (各境界は連続なる故各層で共通) とすると, 式(14)の解は次式のように書けよう.

$$u_j(z; t) = [A_j e^{i\beta^{(j)}z} + B_j e^{-i\beta^{(j)}z}] e^{i(\omega t - \alpha x)}, \quad (j=1, 2, \dots, n) \quad \dots\dots (15)$$

$$\text{このとき, } \beta^{(j)} = \sqrt{(\omega/V_j)^2 - \alpha^2}, \quad (j=1, 2, \dots, n) \quad \dots\dots (16)$$

とすると, 外力の振動数 ω と波数 α の関係が成立する. かくして, 式(16)の $\beta^{(j)}$ については, 前出の $\alpha^{(j)}$ と同様の関係が成立するが, 式(16)より固有値 α_m は外力の振動数 ω に依存することから, 水平伝播速度(位相速度)は分散性を示すことが分る. それゆえ, 式(7)のかわりに以下の値

$$\left. \begin{aligned} \rho_m^{(i)} &= \rho_m^{(i)} H_i = H_i \sqrt{\left(\frac{\omega}{V_i}\right)^2 - \alpha_m^2}, \quad \rho_m^{(i)} = \sin \rho_m^{(i)}, \quad C_m^{(i)} = \cos \rho_m^{(i)} \\ R'_{ij} &= \frac{\mu_i \beta_m^{(i)}}{\mu_j \beta_m^{(j)}} = \frac{\rho_i}{\rho_j} \frac{H_i}{H_j} \left(\frac{V_i}{V_j}\right)^2 \frac{\rho_m^{(j)}}{\rho_m^{(i)}}, \quad (i > j) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots (17)$$

を用いて, 放射波の固有モード $\{\Sigma_m(z; \omega), m=1, 2, \dots\}$ を求めれば, 形式的には前記の $\{\Sigma_m(z)\}$ と同じものを使用することができよう. この場合の固有関数 $\{\Sigma_m(z; \omega)\}$ は以下の重みで直交性を示す.

$$w'(z) = \begin{cases} w_1'(z) = \mu_1, & (0 \leq z \leq H_1) \\ w_2'(z) = \mu_2, & (H_1 \leq z \leq H_1 + H_2) \\ \dots\dots\dots \\ w_n'(z) = \mu_n, & (H_1 + \dots + H_{n-1} \leq z \leq H) \end{cases} \quad \dots\dots (18)$$

一方, 埋設構造物は円柱であるから, 上記の放射波に関して, 円筒座標を述べれば以下の式になる.

$$\left. \begin{aligned} \rho_j \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} &= (\lambda_j + 2\mu_j) \frac{\partial \Delta}{\partial r} - 2\mu_j \frac{\partial \tilde{w}_z}{r \partial \theta} + 2(\mu_j + \mu_j' \frac{\partial}{\partial t}) \frac{\partial \tilde{w}_\theta}{\partial z} \\ \rho_j \frac{\partial^2 v_j}{\partial t^2} &= (\lambda_j + 2\mu_j) \frac{\partial \Delta}{r \partial \theta} - 2(\mu_j + \mu_j' \frac{\partial}{\partial t}) \frac{\partial \tilde{w}_r}{\partial z} + 2\mu_j \frac{\partial \tilde{w}_z}{\partial r} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots (19)$$

かくして, 周辺地盤の一般変位 U_r, V_θ は, 式(12)および式(19)の解の和として, 以下のようになる.

$$U_r(r, \theta, z; t) = A_0 e^{i\omega t} \sum_{m=1}^{\infty} A_m \frac{\omega^2}{\xi_m^2} \Sigma_m(z) \cos \theta + \sum_{m, n=1}^{\infty} \left[A'_{mn} \frac{\partial K_n(k_m r)}{\partial r} + n B'_{mn} \frac{K_n(k_m r)}{r} \right] \cos n\theta \Sigma'_m(z; \omega) e^{i\omega t} \quad \dots\dots (20)$$

$$V_\theta(r, \theta, z; t) = -A_0 e^{i\omega t} \sum_{m=1}^{\infty} A_m \frac{\omega^2}{\xi_m^2} \Sigma_m(z) \sin \theta - \sum_{m, n=1}^{\infty} \left[n A'_{mn} \frac{K_n(k_m r)}{r} + B'_{mn} \frac{\partial K_n(k_m r)}{\partial r} \right] \sin n\theta \Sigma'_m(z; \omega) e^{i\omega t} \quad \dots\dots (21)$$

このとき, 多層地盤より受ける単位長さ当りの側圧 $P_j(z; t)$ は以下のように計算される.

$$P_j(z; t) = 4 \int_0^{\pi/2} [\rho_r \cos \theta - \rho_\theta \sin \theta]_{r=a} a \, d\theta = \sum_{m=1}^{\infty} \pi a \mu_j k_m^2 [A_m K_1(k_m a) + B_m K_1(k_m a)] \Sigma'_m(z; \omega) e^{i\omega t} \quad \dots\dots (22)$$

$$\text{ただし, } k_m^2 = [\mu_i \{\beta_m^{(i)}\}^2 + i\omega \mu_i \{\beta_m^{(i)}\} - \rho_i \omega^2] / \mu_i = -\alpha_m^2 + i\omega \mu' / \mu \cdot \zeta_m^2, \quad h_m^2 = (V_i / U_i)^2 \cdot k_m^2 \quad \dots (23)$$

したがって、構造物の運動方程式において、基礎よりの慣性力のみならず式(22)の剛性を外力として受ける場合を解けば、地盤との連成振動を考慮した応答が得られるが、ここでは省略する。

4. 数値計算結果とその考察 地盤のモデルとしては、基礎に3層載っている場合を対象にした。一方、構造物は、円断面剛基礎がその底面中心軸まわりに動揺振動を行なうものとして、周波数応答について数値計算を行なった結果の一部を、図2および図3に掲げた。図2は構造物表面よりの放射波が分散性を持つために、その伝播モード $\{Z_m(z; \omega)\}$ が周波数 ω に依存することを示したものであり、地盤剛性(あるいは伝播速度)の分布形式が異なると、周波数による変動傾向が異なることがよく表われている。さらに、上下方向のみ伝播する場合の固有モード $\{Z_m(z)\}$ が $\{Z_m(z; \omega)\}$ の非連続波と連続波の限界に位置するものであることが分る。一先、図3は構造物の周波数応答倍率であるが、剛性大なる層の層厚が減少するにつれて、周辺地盤の動的効果が薄れる傾向を示し、地中構造物の共振振動数は増大すると言えよう。

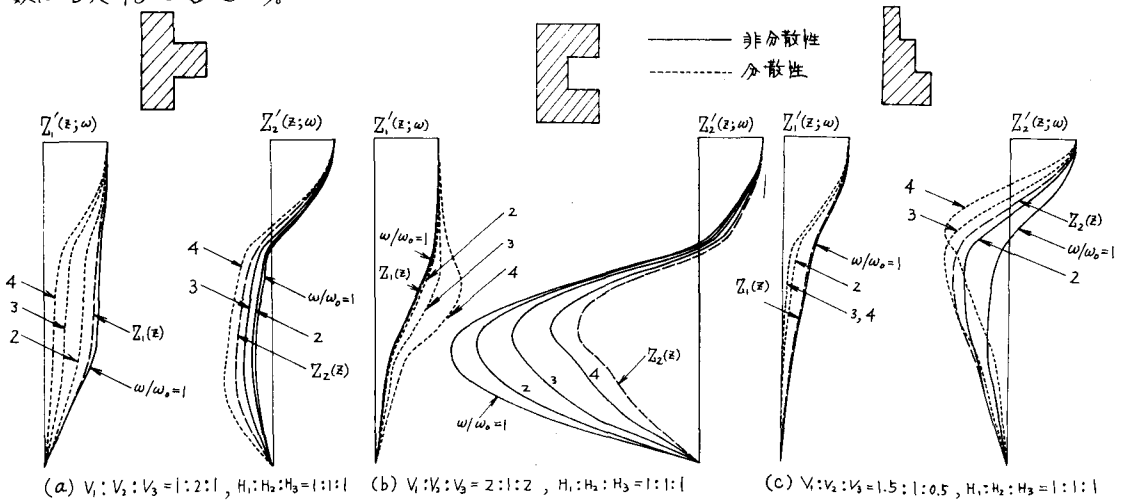


図2 水平伝播モード $\{Z_m(z; \omega)\}$ の周波数依存性

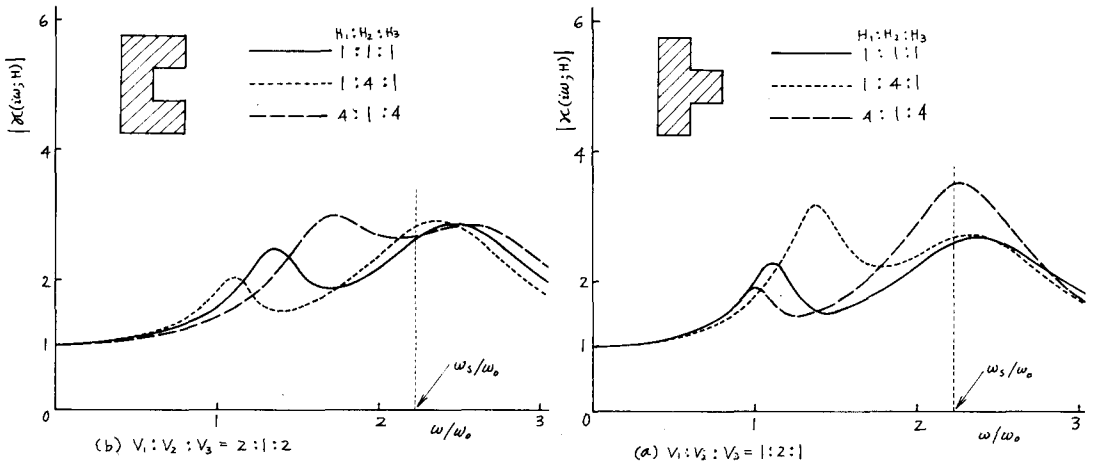


図3 構造物頂部の周波数応答倍率

参考文献 1) 田治見：日本地震工学シンポジウム(1966)講義集, pp. 255-260, 2) 後藤・秋百：土木学会論文報告集, 第177号, 1950.5, pp. 21-32.