I-144　　L形平板の2・3の解法について

大阪市立大学　正員　倉田宗章
〃　　　〃　谷平　勉
〃　　　〃　○小林治俊

1. まえがき

本文は、90度の凹角部を有し周辺で単純支持されたL形平板の曲げについて、L形平板が幾つかの矩形要素に分割出来ることから既知の矩形平板解を利用して、板内で連続解の得られる方法を2・3述べ、併せて数値計算例を示すものである。

2. L形平板の解析方法

a) 解法1 [1]

L形平板を2つに分割し、基本要素として三辺単純支持一辺自由な板を用いる（図1）。板1、板2の自由辺は各々 $y=0$、$y'=0$ 辺で、各板の寸法は図の様に定める。

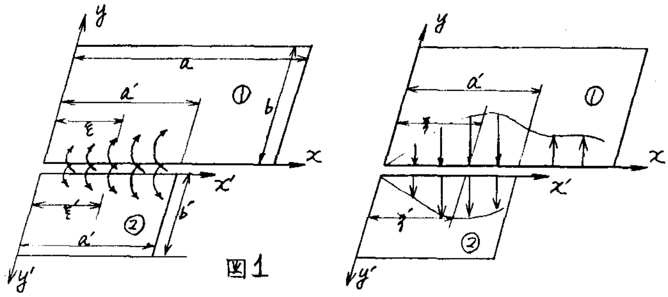

図1

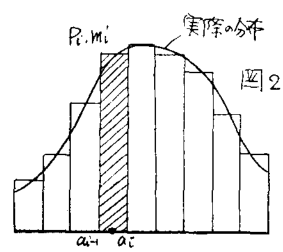

図2

この基本要素に於て、板1の自由辺上 $0 \leq x \leq a'$ 区間に不静定モーメント、及び不静定反力を作用させ、$a' < x \leq a$ 区間には不静定反力を作用させる。又板2の自由辺には、板1の $0 \leq x \leq a'$ 区間に作用する不静定モーメント、不静定反力と等大、逆向きの不静定力を作用させる（図1参）。これら不静定力は、一般に連続して分布するものであるが、今回は図2に示すように、近似的に階段状に変化して分布しているものと仮定してやると、これら不静定力による板1、板2のたわみ w_1、w_2 は、各々次の様に表わすことが出来る。

$$w_1 = \sum_{i=1}^{s} P_{1i}\int_{a_{i-1}}^{a_i}\overline{w_p}\,d\xi - \sum_{j=1}^{t} P_{2j}\int_{a_{j-1}}^{a_j}\overline{w_p}\,d\xi + \sum_{i=1}^{s} M_i\int_{a_{i-1}}^{a_i}\overline{w_m}\,d\xi$$

$$w_2 = -\sum_{i=1}^{s} P_{1i}\int_{a_{i-1}}^{a_i}\overline{w_p}'\,d\xi' + \sum_{i=1}^{s} M_i\int_{a_{i-1}}^{a_i}\overline{w_m}'\,d\xi'$$

ここで、s, t は不静定力の作用区間における矩形分布力への分割数を表わし、(a_i, a_{i-1}), (a_j, a_{j-1}) は各作用区間 i 番目、j 番目分割区間の足の x 座標を示しており、P_{1i}, P_{2j}, M_i は添字区間の分布不静定力の強度である。又 $\overline{w_p}$, $\overline{w_m}$ は各々 $x=\xi$ 地点に作用する単位の反力、モーメントによる板1のたわみ、$\overline{w_p}'$, $\overline{w_m}'$ は $x'=\xi'$ 地点に同じものが作用する場合の板2のたわみを表わす。
これらを式表示すれば次のようになる。

$$\overline{W_p}=\frac{2a^2}{(1-\nu)\pi^3 D}\sum_{m=1,2,3}\frac{\sinh m\pi\lambda}{m^3\gamma_m}\left[\left(\gamma_m-\frac{1+\nu}{2}\right)\left\{\frac{\sinh m\pi\eta}{\sinh m\pi\lambda}-\frac{\eta}{\lambda}\cosh m\pi(\lambda-\eta)\right\}-\left\{\frac{\cosh m\pi\eta}{\cosh m\pi\lambda}-\frac{\eta}{\lambda}\cosh m\pi(\lambda-\eta)\right\}\right]\sin\alpha_m\xi\,\sin\alpha_m x$$

$$\overline{W_m}=\frac{2a}{(1-\nu)\pi^2 D}\sum_{m=1,2,3}\frac{\cosh m\pi\lambda}{m^2\gamma_m}\left[\frac{1+\nu}{2}\left\{\frac{\sinh m\pi\eta}{\sinh m\pi\lambda}-\frac{\eta}{\lambda}\cosh m\pi(\lambda-\eta)\right\}-(\gamma_m-1)\left\{\frac{\cosh m\pi\eta}{\cosh m\pi\lambda}-\frac{\eta}{\lambda}\cosh m\pi(\lambda-\eta)\right\}\right]\sin\alpha_m\xi\,\sin\alpha_m x$$

ここに　$\lambda=b/a$，$\eta=y/a$，$\alpha_m=m\pi/a$，$\gamma_m=(3+\nu)/2+(1-\nu)m\pi\lambda\cdot\mathrm{cosech}\,2m\pi\lambda$，$D$：板の曲げ剛度，$\nu$：ポアソン比 ヌ．$\overline{W_p}'$，$\overline{W_m}'$ は上式で，a, b, y, x, ξ を夫々 a', b', y', x', ξ' で置きかえたものであることは自明であろう。
さて板1，板2のたわみはこの他に上載荷重によるものを付加してやらねばならない。これを W_ℓ，W_ℓ' とすれば実際のたわみが次の様に得られる。

板1；　$W_1=W_1+W_\ell$　　　板2；　$W_2=W_2+W_\ell'$

ここに
$$W_\ell=\sum_m\sum_n a_{mn}\left[\sin\beta_n y+\Lambda_{mn}\left\{\left(\gamma_m-\frac{3+\nu}{2}\right)\left[\frac{\eta}{\lambda}\cosh m\pi(\lambda-\eta)-\frac{\sinh m\pi\eta}{\sinh m\pi\lambda}\right]+\left[\frac{\cosh m\pi\eta}{\cosh m\pi\lambda}-\frac{\sinh m\pi\eta}{\sinh m\pi\lambda}\right]\right\}\right]\sin\alpha_m x$$

$\beta_n=n\pi/b$，$\Lambda_{mn}=\{(\beta_n/\alpha_m)^3+(2-\nu)(\beta_n/\alpha_m)\}\sinh m\pi\lambda/(1-\nu)\gamma_m$，等分布荷重 q の場合　$a_{mn}=16q/\{D\pi^2(\alpha_m^2+\beta_n^2)^2 mn\}$

$\overline{W_\ell}'$ は $\overline{W_p}\to\overline{W_p}'$ と同じ変換操作を行ったもの。これが目的のL形板としての条件を具えるには，接合辺($y=y'=0$)の $0\le x\le a'$ ($0\le x'\le a'$)区間で板1，板2のたわみ，slopeが等しく，$a'\le x\le a$ にて板1のたわみが零とならねばならない。この条件に各不静定力への分割区間の中央で満足させる選点法を用いる。各条件式は次のように書かれる。

① $\left[W_1\right]_{\substack{x=x_i\\y=0}}=\left[W_2\right]_{\substack{x'=x_i'\\y'=0}}$　② $\left[\dfrac{\partial W_1}{\partial y}\right]_{\substack{x=x_i\\y=0}}=-\left[\dfrac{\partial W_2}{\partial y'}\right]_{\substack{x'=x_i'\\y'=0}}$　③ $\left[W_1\right]_{\substack{x=x_j\\y=0}}=0$　$\left(\begin{matrix}i=1,2,3,\cdots S\\j=1,2,3,\cdots t\end{matrix}\right)$

従ってこの$(2S+t)$元連立方程式を解くことによって各分布不静定力 P_{1i}，P_{2j}，M_i が求まり，それらを用いればL形板のたわみ，断面力が算出される。

b)解法2

基本fieldに四辺単純支持矩形板を用いて，いわゆるIntegral Method[3)]による解析を試みる。図3を参照すれば，作り出すL形板の未定境界はFである。Fより幾分か離れた地点に補助境界Γを設定し，Γ上に補正力として線荷重，線モーメントを作用させるが，補正力の分布型を前例で用いた矩形分布と仮定する。前例の手法に従ってこれら補正力によるたわみ式は次の様に表わされる。

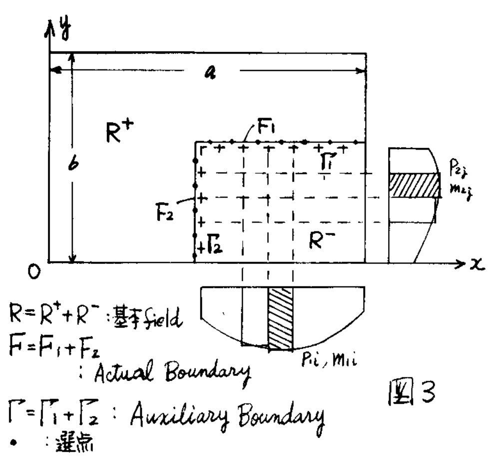

図3

Γ_1上の補正力項

線荷重によるもの　　$W_{P_1}=\sum_{i=1}^{S}P_{1i}\int_{a_{i-1}}^{a_i}\overline{W_p}\,d\xi$

線モーメントによるもの　　$W_{m_1}=\sum_{i=1}^{S}M_{1i}\int_{a_{i-1}}^{a_i}\left(\frac{\partial\overline{W_p}}{\partial\eta}\right)d\xi$

Γ_2上の補正力項

線荷重によるもの　　$W_{P_2}=\sum_{j=1}^{t}P_{2j}\int_{b_{j-1}}^{b_j}\overline{W_p}\,d\eta$

線モーメントによるもの　　$W_{m_2}=\sum_{j=1}^{t}M_{2j}\int_{b_{j-1}}^{b_j}\left(\frac{\partial\overline{W_p}}{\partial\xi}\right)d\eta$

ここで$\overline{W}_p$は基本field Rの一点(ξ,η)にunit loadを受ける場合のRのたわみである。

$$\overline{W}_p = \frac{4}{abD}\sum_{m=1,2,3}\sum_{n=1,2,3}\frac{\sin\alpha_m\xi\,\sin\beta_n\eta}{(\alpha_m^2+\beta_n^2)^2}\sin\alpha_m x\cdot\sin\beta_n y ,$$

D：板の曲げ剛度

$\alpha_m = m\pi/a$, $\beta_n = n\pi/b$

さてこれら補正力の他に，L形板（R^+）の実際の上載荷重を想定し，R上に全面等分布荷重が満載した力学系を考えれば，結局Rにおける全たわみ$\overline{W}$は次式となる。

$$\overline{W} = \overline{W}_{P1} + \overline{W}_{m1} + \overline{W}_{P2} + \overline{W}_{m2} + \overline{W}_l$$

ここにW_lはRの等分布載荷によるたわみである；

$$\overline{W}_l = \frac{16q}{\pi^2 D}\sum_{m=1,3,5}\sum_{n=1,3,5}\frac{\sin\alpha_m x\cdot\sin\beta_n y}{mn\,(\alpha_m^2+\beta_n^2)^2}$$

従ってこれらの力学系が実際のL形板となるには，未定境界F（$=F_1+F_2$）にて単純支持の条件が満たされればよいことになる。この境界での条件をF上の選点で満たす（図3参）。即ち

$$(\overline{W})_{\substack{x=x_i\\y=b_1}}=0 \quad , \quad \left(\frac{\partial^2\overline{W}}{\partial y^2}+\nu\frac{\partial^2\overline{W}}{\partial x^2}\right)_{\substack{x=x_i\\y=b_1}}=0 \quad ; \ (i=1,2,\cdots s)$$

$$(\overline{W})_{\substack{x=a_1\\y=y_j}}=0 \quad , \quad \left(\frac{\partial^2\overline{W}}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2\overline{W}}{\partial y^2}\right)_{\substack{x=a_1\\y=y_j}}=0 \quad ; \ (j=1,2,\cdots t)$$

ν：ポアソン比

この連立方程式を解くことにより，不静定量$P_{1i}, M_{1i}, P_{2j}, M_{2j}$ $\{i=1\cdots s, j=1\cdots t\}$が決定されることになるが，真の境界Fと補正境界$\Gamma$との距離，あるいは矩形分布への分割数等諸量を漸次決定してゆく収束計算となる。この様にして得られた解は当然連続解である。

C). 解法3

基本field を3辺単純支持，一辺自由な板②③，及び2隣辺単純支持，2隣辺自由で自由辺の交点が点支持されている板①に採る。

この場合は接合面A，Bにて連続条件：{たわみ，slope，モーメント，換算せん断力が各板間で等しい}，を合せることになるが，パネル①のA面，B面に前出のように不静定力を作用させることが困難であるから

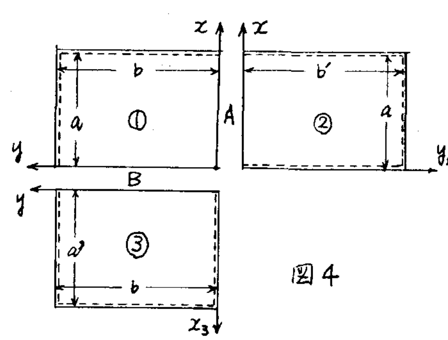

図4

単純に考えて各パネルのたわみをLevy型の級数型で与えておき，内在する積分定数を未知量とし接合面A．Bにおける各パネル間の連続条件，各パネルの境界条件より得られる関係式にて表現することにする。それでこの例では，連続条件，もしくは境界条件は前2例とは違って厳密に辺長にわたる級数展開で満たされることになる。

たわみの仮定関数は例えばパネル①では

$$W_1 = \sum_m\sum_n F_{mn1}\sin\alpha_m x\,\sin\beta_n y + \sum_m Y_{m1}\sin\alpha_m x + \sum_n X_{n1}\sin\beta_n y$$

ここに　$Y_{m1} = A_{m1}\cosh\alpha_m y + B_{m1}\alpha_m y\sinh\alpha_m y + C_{m1}\sinh\alpha_m y + D_{m1}\alpha_m y\cosh\alpha_m y$

$X_{n1} = A'_{n1}\cosh\beta_n x + B'_{n1}\beta_n x\sinh\beta_n x + C'_{n1}\sinh\beta_n x + D_{n1}\beta_n x\cosh\beta_n x$

$A_{m1}, B_{m1}, \cdots C'_{n1}, D'_{n1}$は積分定数，$\alpha_m = m\pi/a$，$\beta_n = n\pi/b$，$F_{mn1} = 16q/\{D\pi^2(\alpha_m^2+\beta_n^2)^2 mn\}$．
パネル②は上式で$\sum_n$X型を省いたもの，パネル③は$\sum_m$Y型を省いたものであり，a，b等諸量は各パネルに準じたものを使用する。この様にして仮定したたわみ関数内の積分定数は，上述の境界条件（全て単純支持），境界条件より最終的には次の４種の連立方程式群として関連づけられる。

$$G(\delta_{m1},\delta_{m2})A_{m1}+\left[G(\delta_{m1},\delta_{m2})+H(\delta_{m1},\delta_{m2})\right]B_{m1}+\frac{2}{a}\sum_n\frac{\beta_n}{\alpha_m^2+\beta_n^2}A'_{n1}-\frac{4}{a}\sum_m\frac{\beta_n^3}{(\alpha_m^2+\beta_n^2)^2}B'_{n1}=\sum_n\left(\frac{\beta_n}{\alpha_m}F_{mn1}+\frac{\beta'_n}{\alpha_m}F_{mn2}\right) \quad \text{---(1)}$$

$$(1-\nu)G(\delta_{m1},\delta_{m2})A_{m1}-\left[(1+\nu)G(\delta_{m1},\delta_{m2})-(1-\nu)H(\delta_{m1},\delta_{m2})\right]B_{m1}+(1-\nu)\frac{2}{a}\sum_n\frac{\beta_n^3}{\alpha_m^2(\alpha_m^2+\beta_n^2)}A'_{n1}$$
$$+\frac{4}{a}\sum_n\frac{\beta_n^3}{\alpha_m^2(\alpha_m^2+\beta_n^2)}\left\{(2-\nu)-(1-\nu)\frac{\beta_n^2}{\alpha_m^2+\beta_n^2}\right\}B'_{n1}=\sum_n\left[\frac{\beta_n}{\alpha_m}\left\{(2-\nu)+\frac{\beta_n^2}{\alpha_m^2}\right\}F_{mn1}+\frac{\beta'_n}{\alpha_m}\left\{(2-\nu)+\frac{\beta_n'^2}{\alpha_m^2}\right\}F_{mn2}\right] \quad \text{---(2)}$$

$$-\frac{2}{b}\sum_m\frac{\alpha_m}{\alpha_m^2+\beta_n^2}A_{m1}+\frac{4}{b}\sum_m\frac{\alpha_m^3}{(\alpha_m^2+\beta_n^2)^2}B_{m1}+G(\gamma_{n1},\gamma_{n3})A'_{n1}+\left[G(\gamma_{n1},\gamma_{n3})+H(\gamma_{n1},\gamma_{n3})\right]B'_{n1}=\sum_m\left(\frac{\alpha_m}{\beta_n}F_{mn1}+\frac{\alpha'_m}{\beta_n}F_{mn3}\right) \quad \text{---(3)}$$

$$(1-\nu)\frac{2}{b}\sum_m\frac{\alpha_m^3}{\beta_n^2(\alpha_m^2+\beta_n^2)}A_{m1}+\frac{4}{b}\sum_m\frac{\alpha_m^3}{\beta_n^2(\alpha_m^2+\beta_n^2)}\left\{(2-\nu)-(1-\nu)\frac{\alpha_m^2}{\alpha_m^2+\beta_n^2}\right\}B_{m1}$$
$$+(1-\nu)G(\gamma_{n1},\gamma_{n3})A'_{n1}-\left[(1+\nu)G(\gamma_{n1},\gamma_{n3})-(1-\nu)H(\gamma_{n1},\gamma_{n3})\right]B'_{n1}=\sum_m\left[\frac{\alpha_m}{\beta_n}\left\{(2-\nu)+\frac{\alpha_m^2}{\beta_n^2}\right\}F_{mn1}+\frac{\alpha'_m}{\beta_n}\left\{(2-\nu)+\frac{\alpha_m'^2}{\beta_n^2}\right\}F_{mn3}\right] \quad \text{---(4)}$$

ここで $\delta_{m1}=\alpha_m b$，$\delta_{m2}=\alpha_m b'$，$\gamma_{n1}=\beta_n a$，$\gamma_{n3}=\beta_n a'$，$\alpha'_m=m\pi/a'$，$\beta'_n=n\pi/b'$，G，H記号は例えば $G(\delta_{m1},\delta_{m2})=\coth\delta_{m1}+\coth\delta_{m2}$，$H(\delta_{m1},\delta_{m2})=\delta_{m1}(1-\coth^2\delta_{m1})+\delta_{m2}(1-\coth^2\delta_{m2})$ のごとく表わすものである。
$F_{mn2}=16q/\{D\pi^2(\alpha_m^2+\beta_n'^2)^2 mn\}$，$F_{mn3}=16q/\{D\pi^2(\alpha_m'^2+\beta_n^2)^2 mn\}$．

3.数値計算例

紙面の都合上，解法３の結果のみ記すことにし，他の解法の結果，三法の比較等は当日発表の予定である。右図のように寸法をとり，等分布荷重が作用するときは，$A_m=A'_{n1}$，$B_m=B'_m$なる対称曲げとなり連立方程式群は①②の２種となる。

(i) 接合面Aの中央点のたわみの収束性

m=n	20	40	60	80	90	100	
W	0.613	0.583	0.568	0.559	0.556	0.553	$\times 10^{-3}\frac{qa^4}{D}$
%	10.8	5.4	2.7	1.1	0.5		

(ii) たわみの最大値の収束性

m=n	20	40	60	80	90	100	
W	0.695	0.661	0.645	0.636	0.632	0.629	$\times 10^{-3}\frac{qa^4}{D}$
%	10.5	5.1	2.5	1.1	0.5		

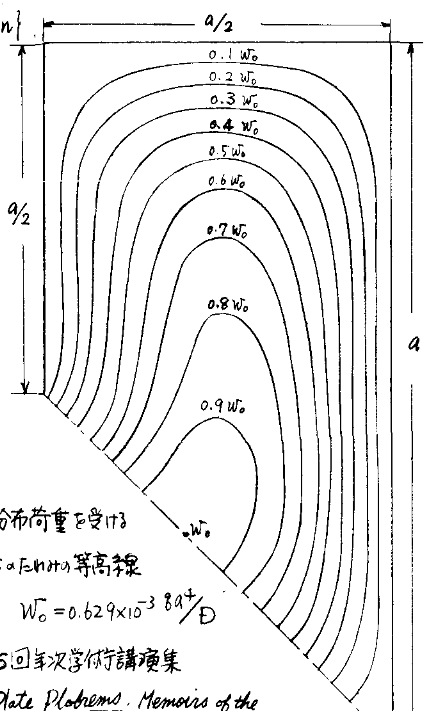

図5. 等分布荷重を受ける場合のたわみの等高線
$W_0=0.629\times10^{-3}\,qa^4/D$

4.参考文献

① 倉田他 部分支持板の曲げについて，土木学会第26回年次学術講演集 1971．I-154 ② KURATA, & OKAMURA, A Method of Approximation on the Plate Plobrems. Memoirs of the Faculty of Engineering OSAKA city Univ. Vol.3. 1961 ③ Oliveria, plane Stress Analysis by a General Integral Method, ASCE. vol.94 EM1, 1968