

京都大学工学部

丹羽義久

小林昭一

○福井卓雄

弾性論の一般的不境界値問題を解く方法として、問題と積分方程式と帰着させて解く方法が最近よく注目されてきたが、可成りいくつかの研究が発表されている。⁽¹⁾ 本報では、一般的不線形境界値問題に対してこの方法の基本的な考え方を示し、次に平板の曲げ問題に対する数値例を挙げて、この方法による解の性質について考察する。

今、領域 $D \subset \mathbb{R}^2$ における境界値問題が次のように与えられているとする。(右図)

$$(1) \quad \Delta_x [u(x)] = f(x) \quad x \in D, \quad G_y [u(y)] = q(y) \quad y \in \partial D$$

ここで、 Δ_x, G_y はそれぞれ点 x, y に関する線形な偏微分作用素である。この問題について解の存在一意性も仮定しておく。上の問題は次の様に変換可能である。

$$(2) \quad \Delta_x [u_1(x)] = 0 \quad x \in D, \quad G_y [u_1(y)] = q(y) - G_y [u_0(y)] \quad y \in \partial D$$

ここで、 $u_0(x)$ は $\Delta_x [u_0(x)] = f(x)$ を満足する関数、解は $u(x) = u_0(x) + u_1(x)$ と表わされる。

基本特異解とは全領域において $\Delta_x [K(x; \alpha)] = \delta(\alpha - x)$ を満足する解 $K(x; \alpha)$ である。

従って $D \subset \mathbb{R}^2$ の補領域 \bar{D} の点 α に対して、 $\Delta_x [K(x; \alpha)] = 0 \quad x \in D, \quad \alpha \in \bar{D}$ 。

$D \subset \mathbb{R}^2$ を含む領域 $S \subset \mathbb{R}^2$ を考え、(2) の解 $u_1(x)$ を次の形を考へる。

$$(3) \quad u_1(x) = \int_{\partial S} K(x; \alpha) \varphi(\alpha) d\alpha \approx \sum_{i=1}^N K(x; \alpha_i) \varphi(\alpha_i) h_i \quad x \in D, \quad \alpha_i \in \partial S$$

ここで、 $\partial S \in \mathbb{R}^2$ 多辺形を考へ、 h_i は i 番目の辺の長さ、 α_i は i 番目の辺に含まれる点、 $\varphi(\alpha_i)$ は α_i 上の等分布する密度を考へる。(3) は $x \in D$ で (2) の場合の方程式を満足する。即ち、

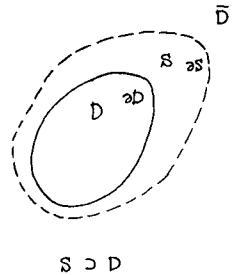
$$(4) \quad \Delta_x [u_1(x)] = \sum_{i=1}^N \varphi(\alpha_i) h_i \Delta_x [K(x; \alpha_i)] = 0$$

従って、 $u_1(x)$ が ∂D 上で境界条件を満足すれば $u_1(x)$ は (2) の解である。境界上の N 個の点 x_j ($j=1, \dots, N$) で境界条件を満足する方が $\varphi(\alpha_i)$ を決めるとすれば、

$$(5) \quad G_x [u_1(x_j)] = \sum_{i=1}^N \varphi(\alpha_i) h_i G_x [K(x_j; \alpha_i)] = q(x_j) - G_x [u_0(x_j)]$$

結局 $\varphi(\alpha_i)$ についての N 元一次方程式が得られる。この $\varphi(\alpha_i)$ を (3) の領域内部の任意の点 x における $u_1(x)$ が求まる。従って、解は $u(x) = u_0(x) + u_1(x)$ と求めることができる。

上の議論は、 $u(x)$ がベクトル量であっても、まったく同様に導くことができる。境界条件がいくつかの境界値の組で表わされる場合は、密度も境界値の数と同じだけの数が必要である。従って、同じ同じの数、基本特異解も与えてやらなければならない。特に、平板の曲げ問題においては、第一の基本特異解として板に垂直な集中荷重が点 α に作用したときの点 x における F の値 $F(x; \alpha)$ 、第二の基本特異解としては点 α に集中曲げモーメントが作用したときの点 x における F の値 $F(x; \alpha)$ である。⁽²⁾



次に、平板の曲げ問題における数値例を挙げる。上述の方法の一例として、得られた数値解について、その考察を加えてみたい。

図1. は半径 a の円板の中心に集中荷重 P が作用させたときのわみ w および曲げモーメント G_r, G_θ の分布を示す。境界点、仮想境界(おおよそ a_i) は上図のように取っている。境界点の数 12 で $\delta/a = 0.05, 0.1, 0.5$ の場合のわみおよび曲げモーメントの数値結果を下図に示す。 δ/a が大きくなる程正解に近付いて、 $\delta/a = 0.5$ ではほとんど正解に近い値を取っている。曲げモーメントのグラフで境界付近で2つに分かれているものは、上側は $A-B$ 上の値、下側は $A-B'$ 上の値を示す。これは、曲げモーメントは境界付近では値が振動することを表わしている。このような振動の振幅は δ/a の値が大きければ小さくなる。同様にして、 δ/a を一定にしておいて境界点の数を増やせば、数値解を正解に近づけることができる。

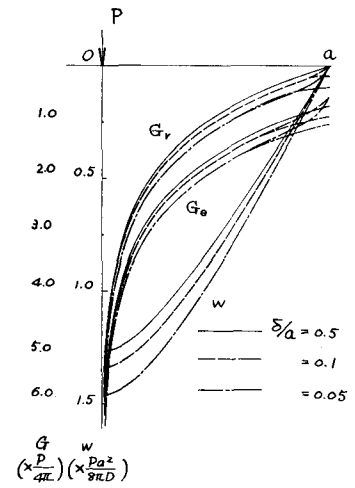
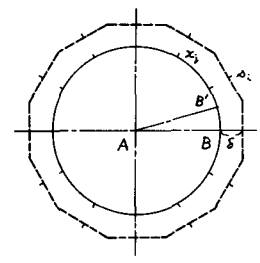


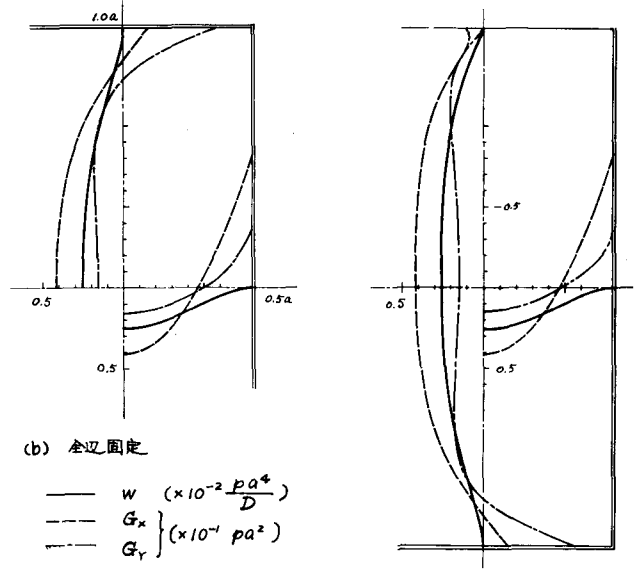
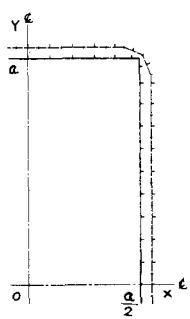
表)

しかし、 δ/a 、境界点の数を両方を採り大きくすると、方程式の特異に近くなり解くことができなくなる。

	$w = 1.267$ ($r=0.02a$)				
$N \delta/a$	0.05	0.1	0.2	0.5	
12	1.459	1.342	1.271	1.260	
24	1.328	1.270	1.262	1.267	
48	1.270	1.264	1.267	-	

図1. 単端支持円板: 集中荷重 P $v=0.3$

図2. は $a \times 2a$ 矩形板に等分布荷重を作用させたときの解を示す。



(a) 境界点と仮想境界、座標

図2. $a \times 2a$ 矩形板: 等分布荷重 P $v=0.3$

(c) 3辺固定1辺単端支持

参考文献: 1) 丹羽, 小林, 橋田: 複合方程式による任意形状多数空孔問題の解析, 土木学会論文報告集, 195, pp. 27-35 (1971).
2) 丹羽, 小林, 橋田: 土木学会, 関西支部年次学術講演会概要 (昭和47年度) 1-2, "複合方程式による板の解析".