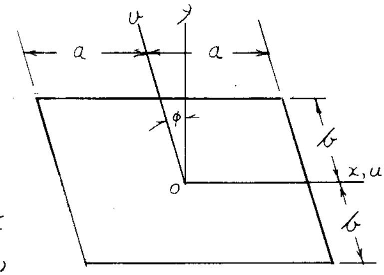
I-140　固有函数法による平行四辺形板の解析

信州大学　正員　谷本勉之助
〃　正員　夏目正太郎
○正員　島田俊樹

1. はじめに　本論文は平行四辺形板の曲げ問題を取り扱っている。斜板を解析するに際し，従来用いられてきた手法，すなわち，有限要素法，階差法，格子に置き換える方法等に対し，私達は固有函数法によって，理論的に解を得たので発表します。ここでは，等分布荷重を満載する周辺が固定された平行四辺形板について述べます。



2. 解析手順　板の曲げを支配する微分方程式 $\nabla^4 w = q/D$ を斜交座標系 Ouv に変換すると，

$$\frac{\partial^4 w}{\partial u^4} + 4\sin\phi\frac{\partial^4 w}{\partial u^3\partial v} + 2(1+2\sin^2\phi)\frac{\partial^4 w}{\partial u^2\partial v^2} + 4\sin\phi\frac{\partial^4 w}{\partial u\partial v^3} + \frac{\partial^4 w}{\partial v^4} = \cos^4\phi\frac{q}{D} \tag{1}$$

この方程式を満たす解を同次解 w_h と特殊解 w_p の和で表わすと　$w = w_h + w_p$.　w_h を求める為に　$w_h = F[(cu+v)\frac{\kappa}{a}]$ とおく。c は(1)の特性方程式を満たす根であり，$c = i\lambda(=ie^{i\phi})$，$-i\mu(=-ie^{-i\phi})$ である。κ は $u=\pm a$ においての境界条件によって定められる固有値方程式　$\sigma\kappa \pm \sin\sigma\kappa = 0$　$(\sigma = 2\cos\phi)$ の根，すなわち，固有値である。各々の固有値に対応する固有函数を用いて，w_h は

$$w_h = \sum_n \lfloor \cos\lambda\kappa\rho, \cos\mu\kappa\rho, -\kappa\rho\sin\lambda\kappa\rho, -\kappa\rho\sin\mu\kappa\rho \rfloor P(\kappa) \lfloor ch\,\kappa\frac{v}{a}, sh\,\kappa\frac{v}{a} \rfloor i A_n$$
$$+\sum_n i \lfloor \sin\lambda\kappa\rho, -\sin\mu\kappa\rho, \kappa\rho\cos\lambda\kappa\rho, -\kappa\rho\cos\mu\kappa\rho \rfloor P(\kappa) \lfloor sh\,\kappa\frac{v}{a}, ch\,\kappa\frac{v}{a} \rfloor i A_n, \quad \rho = \frac{u}{a} \tag{2}$$

の形に書ける。ここで i は実数化マトリクス，$P(\kappa)$ は $u=\pm a$ での条件を処理して得た縮退マトリクス，A_n は未定積分常数群である。特殊解 w_p は $u=\pm a$ で固定という条件から，

$$w_p = \cos^4\phi\frac{a^4 q}{24D}(1-\rho^2)^2. \tag{3}$$

各々の A_n を決定する為に，固有函数を Legendre 多項式によって級数展開すると，

$$w_h = \sum_{m=0}^{\infty} P_{2m}(\rho)\sum_{n=1}^{\infty}\omega_{2mn}\lfloor ch\frac{\kappa v}{a}, sh\frac{\kappa v}{a}\rfloor_n i A_n + \sum_{m=0}^{\infty} P_{2m+1}(\rho)\sum_{n=1}^{\infty}\omega_{2m+1n}\lfloor sh\frac{\kappa v}{a}, ch\frac{\kappa v}{a}\rfloor_n i A_n, \tag{4a}$$

$$a\frac{\partial w_h}{\partial y} = \sum_{m=0}^{\infty} P_{2m}(\rho)\sum_{n=1}^{\infty}\omega'_{2mn}\lfloor sh\frac{\kappa v}{a}, ch\frac{\kappa v}{a}\rfloor_n i A_n + \sum_{m=0}^{\infty} P_{2m+1}(\rho)\sum_{n=1}^{\infty}\omega'_{2m+1n}\lfloor ch\frac{\kappa v}{a}, sh\frac{\kappa v}{a}\rfloor_n i A_n \tag{4b}$$

ここで，　$\omega_{2mn} = \lfloor \alpha, \alpha', -\frac{\beta}{\lambda}, -\frac{\beta'}{\mu}\rfloor_{2mn} P(\kappa)$，　$\omega_{2m+1n} = i\lfloor \alpha, -\alpha', \frac{\beta}{\lambda}, -\frac{\beta'}{\mu}\rfloor_{2m+1n} P(\kappa)$，

$$\omega'_{2mn} = \lfloor \lambda\alpha, \mu\alpha', i\tan\phi\,\alpha-\beta, -i\tan\phi\,\alpha'-\beta'\rfloor_{2mn} P(\kappa)\cdot\kappa, \tag{5}$$

$$\omega'_{2m+1n} = \lfloor \lambda\alpha, -\mu\alpha', i\tan\phi\,\alpha+\beta, i\tan\phi\,\alpha'-\beta'\rfloor_{2m+1n} P(\kappa)\cdot i\kappa$$

$$\{\cos\lambda\pi\rho,\ \cos\mu\pi\rho,\ \lambda\pi\rho\sin\lambda\pi\rho,\ \mu\pi\rho\sin\mu\pi\rho\}=\sum_{m=0}^{\infty}P_{2m}(\rho)\{\alpha,\alpha',\beta,\beta'\}_{2m} \tag{6a}$$

$$\{\sin\lambda\pi\rho,\ \sin\mu\pi\rho,\ \lambda\pi\rho\cos\lambda\pi\rho,\ \mu\pi\rho\cos\mu\pi\rho\}=\sum_{m=0}^{\infty}P_{2m+1}(\rho)\{\alpha,\alpha',\beta,\beta'\}_{2m+1} \tag{6b}$$

特殊解に対しては

$$w_p=\sum_{m=0}^{2}P_{2m}(\rho)k_{2m},\quad a\frac{\partial w_p}{\partial y}=\sum_{m=0}^{1}P_{2m+1}(\rho)k_{2m+1}, \tag{7}$$

ここで特殊解 w_p が，有限な級数展開となっていることは，数値計算を実行する際に有利だと考えられる。 さて，もう一方の境界 $v=\pm b$ での条件は，

$$\begin{bmatrix} w \\ \frac{\partial w}{\partial y}\end{bmatrix}_{v=\pm b}=0. \tag{8}$$

従って

$$\mathbb{Z}_{2mn}=\begin{bmatrix} w\\ w'\\ w\\ w'\end{bmatrix}^{D}_{2mn}\begin{bmatrix} ch\psi, & -sh\psi\\ -sh\psi, & ch\psi\\ ch\psi, & sh\psi\\ sh\psi, & ch\psi\end{bmatrix}_{n}\mathring{a},\qquad \mathbb{Z}_{2m+1n}=\begin{bmatrix} w\\ w'\\ w\\ w'\end{bmatrix}^{D}_{2m+1n}\begin{bmatrix} -sh\psi, & ch\psi\\ ch\psi, & -sh\psi\\ sh\psi, & ch\psi\\ ch\psi, & sh\psi\end{bmatrix}_{n}\mathring{a}. \tag{9}$$

によって，最終的に $\mathbb{A}_n$ を決定する方程式は

$$\begin{bmatrix}\mathbb{Z}_{01} & \cdots\cdots & \mathbb{Z}_{0N}\\ \vdots & & \\ \mathbb{Z}_{N-11} & & \mathbb{Z}_{N-1N}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbb{A}_1\\ \vdots\\ \mathbb{A}_N\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\mathbb{K}_0\\ \vdots\\ \mathbb{K}_{N-1}\end{bmatrix}=0, \tag{10}$$

この方程式から $\{\mathbb{A}\}=-[\mathbb{Z}]^{-1}\{\mathbb{K}\}$ である。この $\{\mathbb{A}\}$ を用いて，w およびその他の物理諸量が計算される。前後しますが上述の Neumann 係数 $\alpha,\alpha',\beta,\beta'$ は次の漸化式によって求められる。

$$\alpha_{2m}=(4m+1)\frac{\sin\lambda\pi}{\lambda\pi}+m(2m+1)(4m+1)\frac{\cos\lambda\pi}{(\lambda\pi)^2}-\frac{4m+1}{(\lambda\pi)^2}\sum_{r=0}^{m-1}(m-r)(2m+2r+1)\alpha_{2r}, \tag{11a}$$

$$\alpha_{2m+1}=-(4m+3)\frac{\cos\lambda\pi}{\lambda\pi}+(m+1)(2m+1)(4m+3)\frac{\sin\lambda\pi}{(\lambda\pi)^2}-\frac{4m+3}{(\lambda\pi)^2}\sum_{r=1}^{m}(m-r+1)(2m+2r+1)\alpha_{2r+1}, \tag{11b}$$

$$\beta_{2m}=-(4m+1)\cos\lambda\pi+m(2m+1)(4m+1)\frac{\sin\lambda\pi}{\lambda\pi}-\frac{4m+1}{\lambda\pi}\sum_{r=1}^{m}\alpha_{2r-1}+\alpha_{2m}$$
$$-\frac{4m+1}{(\lambda\pi)^2}\sum_{r=0}^{m-1}(m-r)(2m+2r+1)\beta_{2r}, \tag{11c}$$

$$\beta_{2m+1}=(4m+3)\sin\lambda\pi+(m+1)(2m+1)(4m+3)\frac{\cos\lambda\pi}{\lambda\pi}+\frac{4m+3}{\lambda\pi}\sum_{r=0}^{m}\alpha_{2r}-\alpha_{2m+1}$$
$$-\frac{4m+3}{(\lambda\pi)^2}\sum_{r=1}^{m}(m-r+1)(2m+2r+1)\beta_{2r-1}. \tag{11d}$$

3. あとがき　固有関数法によれば平行四辺形の曲げ問題の理論解が得られることが示せたと考えます。また，計算を実行するに際して，三菱総合研究所の笠原直哉氏の御協力を得ました。深く感謝致します。すでにいくつかの計算結果を得ましたが，講演の際に，発表致します。