I-139　固有関数法による矩形板の曲げ解析

正員　信州大学　○石川　清志
谷本　勉之助
夏目　正太郎

1. はじめに　矩形板の曲げ解析を複素固有関数法で行う．最近の論文に固有関数法を用いて種々な問題を解いている．また静力学的解析だけでなく動力学的解析も行われている．
固有関数法は考えられる境界条件をすべて満足に取入れることができ，何んの矛盾も生じない．これらからの境界値問題の固有値方程式も定まり，境界条件を満足するところの固有値も比較的簡単に得られる．また展開級数系列の問題にもいろいろな方法がみられるが，ここでは直交関数系のフーリエ級数を用いて解析を進める．
計算例として，四周固定の矩形板を本法とエネルギー法および Iterative 法とを数値結果の比較を行う．またClamp-Free 等の系についてもあたってみる．

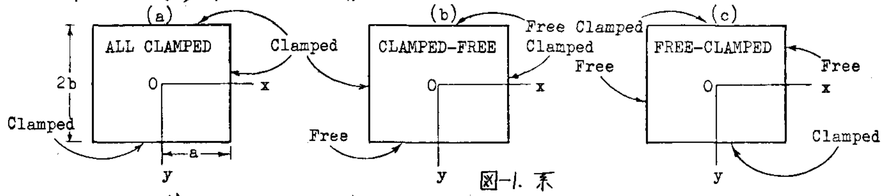

図-1. 系

2. 同次たわみ方程式　板の曲げ基礎微分方程式は次の式より出発する：

$$\nabla^4 w = \frac{q}{D}. \tag{1}$$

この基礎式を都合よく次の2式の和とする

$$w = w_h + w_p, \tag{2}$$

w_h は板の境界条件を十分満足に規定するところの同次方程式である．また w_p は荷重状態を適合するところの特殊解である．それゆえ式(1)は

$$\nabla^4 w_h = 0, \qquad \nabla^4 w_p = \frac{q}{D}. \tag{3}$$

図-1より，系の軸対称より，式(3a)の同次たわみ式は

$$w_h = \sum_n \lfloor \cos\lambda p \quad \lambda p \sin\lambda p \rfloor \cdots \mathrm{ch}\frac{\lambda y}{a}, \quad p = \frac{x}{a}. \tag{4}$$

3. 第1境界条件　図-1において，(a)および(b)は $x = \pm a$ で固定，(c)は自由である．これらは

$$\begin{bmatrix} w \\ \theta_x \end{bmatrix}_{x=\pm a} = 0, \qquad \begin{bmatrix} M_x \\ \bar{S}_x \end{bmatrix}_{x=\pm a} = 0. \tag{5}$$

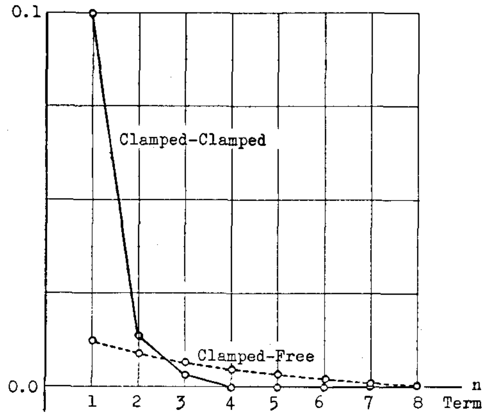

図-2. 固有マトリクスの収束.

第1境界条件の固定および自由の固有値方程式はそれぞれ

$$2\lambda+\sin 2\lambda=0, \qquad 2\lambda-\frac{3+\nu}{1-\nu}\sin 2\lambda=0. \qquad (6)$$

それゆえ，第1境界条件により，固定および自由の同次たわみ方程式は

$$w_h=\sum_n \lfloor \cos\lambda\rho \quad \lambda\rho\sin\lambda\rho \rfloor \begin{bmatrix}\lambda\sin\lambda\\ -\cos\lambda\end{bmatrix} ch\frac{\lambda y}{a}\,\mathrm{i}\,\mathbb{K}, \qquad w_h=\sum_n \lfloor \cos\lambda\rho \quad \lambda\rho\sin\lambda\rho \rfloor \begin{bmatrix}2\cos\lambda-(1-\nu)\lambda\sin\lambda\\ (1-\nu)\cos\lambda\end{bmatrix} ch\frac{\lambda y}{a}\,\mathrm{i}\,\mathbb{K}. \quad (7)$$

4. 特殊解式. 一様分布荷重満載の板の特殊解は

$$w_p=\lfloor 1 \quad \rho^2 \quad \rho^4\rfloor \mathbb{N}_p\{1 \quad \eta^2 \quad \eta^4\}, \qquad \mathbb{N}_p=\begin{bmatrix}a_0&a_2&a_4\\ b_0&b_2&0\\ c_0&0&0\end{bmatrix}. \qquad (8)$$

$\mathbb{N}_p$は式(3b)と第1境界条件により決定する. 固定と自由はそれぞれ

$$\mathbb{N}_p=\frac{qa^4}{24D}\begin{bmatrix}1, & 0 & 0\\ -2, & 0 & 0\\ 1, & 0 & 0\end{bmatrix}, \quad \mathbb{N}_p=\frac{qa^4}{24D}\begin{bmatrix}0, & 0, & -1\\ 12\nu(1-\nu), & 6\nu, & 0\\ -\nu(2-\nu), & 0, & 0\end{bmatrix}.$$

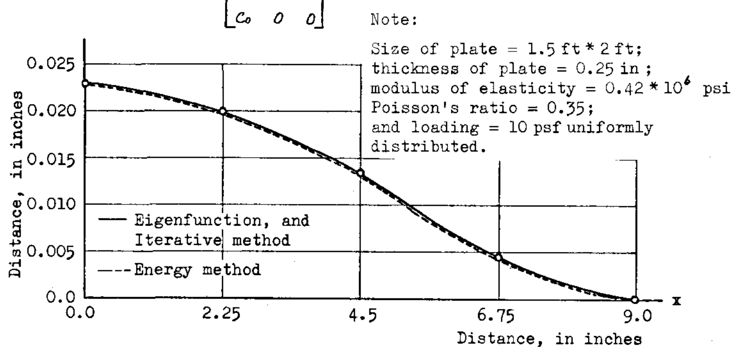

図-3. 0-X軸のたわみ

5. 最終方程式. 同次方程式および特殊解のたわみ式をフーリエ展開すると

$$\begin{aligned} w &= w_h+w_p \\ &= \sum_m^{\infty}\cos m\pi\rho[\mathbb{I}_{mn}]\gamma_n(y)\,\mathrm{i}\,\mathbb{K} \\ &+ \sum_m^{\infty}\cos m\pi\rho[\mathbb{J}_m]. \end{aligned} \qquad (9)$$

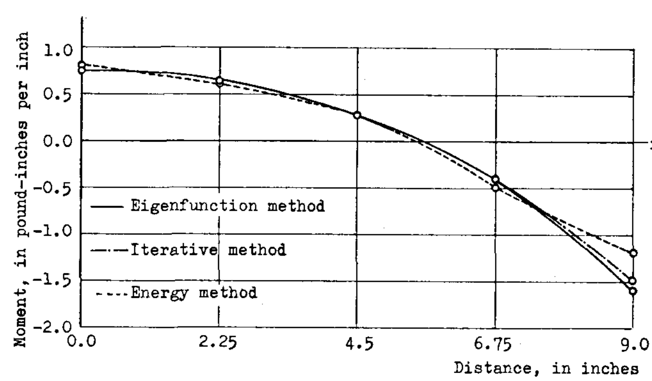

図-4. 0-X軸のモーメント, M_x

第2境界条件を処理することにより，未知積分定数である固有マトリクスを求めることができる. 固定および自由の境界は

$$\begin{bmatrix}w\\ \theta_y\end{bmatrix}_{y=\pm b}=0, \qquad \begin{bmatrix}M_y\\ \bar{S}_y\end{bmatrix}_{y=\pm b}=0. \qquad (10)$$

これらより最終方程式は

$$\lfloor \mathbb{Z}_{mn}\rfloor \mathbb{K}_n+\mathbb{P}_m=0, \qquad (11)$$

ここにおいて

$$\mathbb{Z}_{mn}=[\mathbb{I}_{mn}]\gamma_n(y)\,\mathrm{i}_{y=\pm b}, \quad \mathbb{P}_m=[\mathbb{J}_m].$$

$$\begin{bmatrix}\mathbb{Z}_{01} & \mathbb{Z}_{02} & \cdots & \mathbb{Z}_{0,N}\\ \mathbb{Z}_{11} & \mathbb{Z}_{12} & \cdots & \mathbb{Z}_{1,N}\\ \mathbb{Z}_{21} & \mathbb{Z}_{22} & \cdots & \mathbb{Z}_{2,N}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \mathbb{Z}_{N-1,1} & \mathbb{Z}_{N-1,2} & \cdots & \mathbb{Z}_{N-1,N}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbb{K}_1\\ \mathbb{K}_2\\ \mathbb{K}_3\\ \cdots\\ \mathbb{K}_N\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbb{P}_0\\ \mathbb{P}_1\\ \mathbb{P}_2\\ \cdots\\ \mathbb{P}_{N-1}\end{bmatrix}.$$

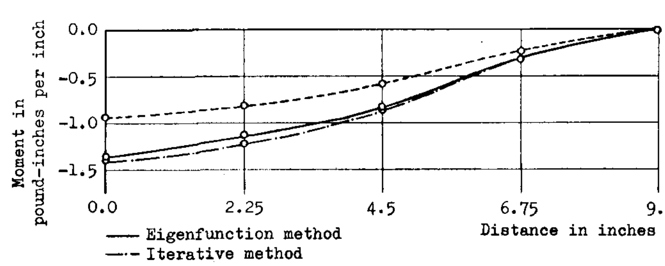

図-5. 縁モーメント, M_y